Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

DEFINICIONES

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x),\, \ldots\, y^{(n}(x)\right) = 0$$

1. Orden n
2. Solución general (familia de curvas)
3. Solución particular (una curva de la familia)

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN $F(x,\, y(x),\, y'(x)) = 0$

1. Variables separadas: $f(y)\, dy = g(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx + C$
2. Homogéneas: $y'(x) = H(x,y)$, con $H(x,y)$ homogénea de grado 0

   c.v. $y = ux \quad \mapsto$ ec. en variables separadas
3. Exactas: $P(x,\, y)\, dx + Q(x,\, y)\, dy = 0$ es diferencial exacta si $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

   sol. general $G(x,y) = C$ verificando $\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ y $\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$
4. Lineales: $y' + P(x)y = Q(x)$

   con el c.v.: $y = uv \quad \mapsto \quad y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left(C + \int Q(x) e^{\int P(x)\,dx}\, dx\right)$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$a_n y^{(n} + a_{n-1} y^{(n-1} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

1. Ecuación homogénea: $b(x) = 0$; Ecuación completa: $b(x) \neq 0$
2. Solución general: $y_G = y_H + y_P$
3. Solución general de la ecuación homogénea, $y_H = y_{H_1} + y_{H_2} + \cdots + y_{H_k}$

   Ecuación característica: $a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$

   λ_0 raíz real simple: $y_{H_i}(x) = Ce^{\lambda_0 x}$

   λ_0 raíz real de multiplicidad s: $y_{H_i}(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_s x^{s-1})e^{\lambda_0 x}$

   $\alpha + i\beta$ raíz compleja simple: $y_{H_i}(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 cos(\beta x) + C_2\, sen(\beta x)\right)$

   $\alpha + i\beta$ raíz compleja de multiplicidad s: $y_{H_i}(x) = e^{\alpha x}\left(P_{s-1}(x) cos(\beta x) + Q_{s-1}(x)\, sen(\beta x)\right)$

   con P_{s-1} y Q_{s-1} polinomios de grado s-1
4. Solución particular de la ecuación completa, y_P

   Si $b(x) = e^{ax}\left(P(x) cos(bx) + Q(x)\, sen(bx)\right)$ se ensaya la solución:

   $$y_P = x^s e^{ax}\left(P_k(x) cos(bx) + Q_k(x)\, sen(bx)\right)$$

   donde s es el grado de multiplicidad de $a + ib$ como raíz de la ecuación característica y k es el máximo entre el grado del polinomio P y el grado del polinomio Q.