Programas matemáticos

CLASIFICACIÓN DE LOS PROGRAMAS

1. Por la diferenciabilidad de las funciones.
   (a) *Diferenciables*: la función objetivo y las restricciones son de clase C^1 o clase C^2.
   Para las de C^1 se obtienen C.N. de optimalidad local.
   Para las de C^2 se obtienen C.N. y C.S. de optimalidad local.
   (b) *No diferenciables*: alguna de las funciones que intervienen en su formulación no es diferenciable.
2. Por la convexidad.
   (a) *Convexos*: el conjunto factible es convexo y el objetivo es uno de los siguientes:
   i. Maximizar una función objetivo cóncava.
   ii. Minimizar una función objetivo convexa.

   En estos programas se dan condiciones de optimalidad global.
   (b) *No convexo*: no se verifica alguna de las condiciones anteriores.
3. Por el tipo de restricción.
   (a) *Sin restricciones*.
   (b) *Con restricciones de igualdad*.
   (c) *Con restricciones de desigualdad*.
   (d) *Programas mixtos*: restricciones de desigualdad e igualdad.
4. Por la linealidad de las funciones.
   (a) *Lineales*: tanto la función objetivo como las restricciones son lineales.
   (b) *No lineales*: alguna función que interviene no es lineal.

La clasificación no es excluyente

TEOREMA DE WEIERSTRASS

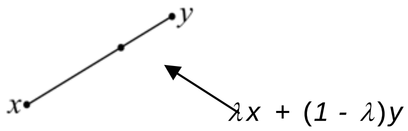
Si f es continua en S, siendo S un conjunto cerrado y acotado, entonces f alcanza máximo y mínimo absoluto en S.

RESOLUCIÓN GRÁFICA

1. Representación del conjunto factible.
2. Curvas de nivel de la función objetivo.
3. Determinación de la dirección del máximo crecimiento/decrecimiento.
4. Determinación de los óptimos.

CONJUNTOS CONVEXOS

1. Segmento cerrado de extremos x, y: $\left[x,\ y\right] = \left\{\lambda x + (1-\lambda)y \,\middle|\, \lambda \in \left[0,\ 1\right]\right\}$



2. $X \subseteq R^n$, $X \neq \varnothing$, X es convexo si $\forall\ x,\ y \in X,\ [x,\ y] \subset X$

X convexo   *X* no convexo

3. Propiedades $\begin{cases} \varnothing \text{ es convexo} \\ \text{Intersección de convexos es convexo} \end{cases}$

4. Algunos conj. convexos $\begin{cases} \text{Sea } c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0 \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}: \\ \text{Hiperplano } \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \alpha\right\} \\ \text{Semiespacio cerrado } \begin{cases} \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \geq \alpha\right\} \\ \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leq \alpha\right\} \end{cases} \\ \text{Semiespacio abierto } \begin{cases} \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n > \alpha\right\} \\ \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n < \alpha\right\} \end{cases} \end{cases}$

FUNCIONES CONVEXAS Y CÓNCAVAS

X convexo, $X \subseteq \text{Dom}(f)$

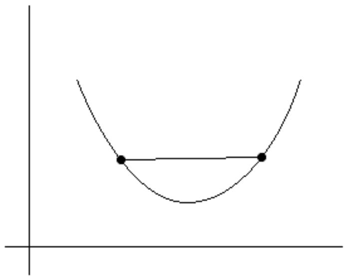
1. Definiciones

f convexa en X si $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall\ x, y \in X, \forall\ \lambda \in [0, 1]$

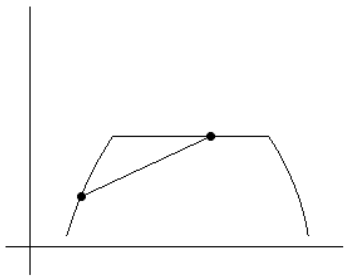
f estrict. convexa en X si $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall\ x, y \in X, x \neq y, \forall\ \lambda \in (0, 1)$

f cóncava en X si $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall\ x, y \in X, \forall\ \lambda \in [0, 1]$

f estrict. cóncava en X si $f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall\ x, y \in X, x \neq y, \forall\ \lambda \in (0, 1)$



f estrictamante convexa



f cóncava pero no estrictamante cóncava

2. Caracterizaciones: signo de la forma cuadrática definida por la matriz hessiana

$Hf(x)$ DP $\forall\ x \in X \quad \Rightarrow \quad f$ estrictamante convexa en X

$Hf(x)$ SDP $\forall\ x \in X \quad \Leftrightarrow \quad f$ convexa en X

$Hf(x)$ DN $\forall\ x \in X \quad \Rightarrow \quad f$ estrictamante cóncava en X

$Hf(x)$ SDN $\forall\ x \in X \quad \Leftrightarrow \quad f$ cóncava en X

$Hf(x)$ I $\forall\ x \in X \quad \Rightarrow \quad f$ no es cóncava ni convexa en X

PROGRAMAS CONVEXOS

Si en un programa convexo existen óptimos locales, estos son óptimos globales