Programación lineal: Algoritmo del simplex

Se considera la formulación estándar de un problema de programación lineal siguiendo la notación utilizada en las clases teóricas:

$$\begin{aligned} &\textbf{Minimizar } \boldsymbol{c^t x} \\ &\textbf{s.a:} \quad \boldsymbol{Ax = b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{x \geq 0} \end{aligned}$$

ALGORITMO DEL SIMPLEX

Paso 1

Se obtiene una solución factible básica inicial $x_0^t = (x_{0B}^t, x_{0R}^t) = ((B^{-1}b)^t, 0)$, asociada a la matriz básica B. Se va al paso 2.

Paso 2

Se calculan las diferencias $z_j - c_j$. Se va al paso 3.

Paso 3: Criterio de óptimo

Según el signo de los valores $z_j - c_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ se tienen 3 casos posibles:

1. Si $z_j - c_j \leq 0$, para todo j, entonces x_0^t es solución del programa.

   - Si $z_j - c_j < 0$, para $j = m+1, m+2, \ldots, n$, entonces la solución x_0^t es única.

   - Si $z_j - c_j = 0$ para algún $j = m+1, m+2, \ldots, n$, entonces la solución x_0^t no es única.
     - Si algún $\alpha_{ij} > 0$, se introduce el vector A_j en la base y se va al paso 5.
     - Si todos los $\alpha_{ij} \leq 0$, entonces la solución es la semirrecta

       $$(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0m}, 0, \ldots, 0) + \lambda\,(-\alpha_{1j}, -\alpha_{2j}, \ldots, -\alpha_{kj}, \ldots, -\alpha_{mj}, 0, \ldots, 0, \overset{j)}{1}, 0, \ldots, 0), \text{ con } \lambda \geq 0$$

2. Si $z_j - c_j > 0$, para algún $j = m+1, m+2, \ldots, n$, y las correspondientes $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}$ son no positivas, entonces el programa no tiene solución.

3. Si $z_j - c_j > 0$, para algún $j = m+1, m+2, \ldots, n$, y algún $\alpha_{ij} > 0$, entonces x_0^t no es solución del programa. Se va al paso siguiente.

Paso 4: Criterio de entrada

Si $z_e - c_e = \max \{z_j - c_j \mid z_j - c_j > 0\}$, la variable x_e pasa de ser no básica a ser básica, es decir, entra en la matriz básica la columna A_e. Se va al paso siguiente.

Paso 5 Criterio de salida

Si $\frac{x_{0k}}{\alpha_{ke}} = \min \left\{ \frac{x_{0i}}{\alpha_{ie}} \mid \alpha_{ie} > 0 \right\}$, la variable x_k pasa de ser básica a ser no básica, por tanto sale de la matriz básica la columna A_k.

Se repite el proceso, volviendo al paso 2.

TABLA DEL SIMPLEX

Para poder realizar de forma rápida y cómoda los cálculos del algoritmo del simplex se utiliza una tabla, llamada *tabla del simplex*, correspondiente a una solución factible básica, que recoge toda la información necesaria para aplicar el algoritmo del simplex.

Puesto que siempre puede encontrarse una matriz básica inicial que sea I_m (ver el apartado: Cálculo de la solución factible básica inicial) y por medio de un adecuado cambio de orden puede colocarse dicha matriz en las m primeras columnas, la tabla inicial del simplex puede escribirse de la siguiente forma:

			c_1	c_2	....	c_m	c_{m+1}	....	c_n
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	....	$\mathbf{A_m}$	$\mathbf{A_{m+1}}$	....	$\mathbf{A_n}$
c_1	$\mathbf{x_1}$	b_1	1	0	....	0	$\alpha_{1\,m+1}$	....	α_{1n}
c_2	$\mathbf{x_2}$	b_2	0	1	....	0	$\alpha_{2\,m+1}$	....	α_{2n}
....	.....	....	....	....	....	....	....	....	....
c_m	$\mathbf{x_m}$	b_m	0	0	....	1	α_{mm+1}	....	α_{mn}
		z_0	$z_1 = c_1$	$z_2 = c_2$	....	$z_m = c_m$	z_{m+1}	....	z_n
			0	0	....	0	$z_{m+1}-c_{m+1}$	....	$z_n - c_n$

siendo:

- $\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{0m} \end{pmatrix} = B^{-1}b = I_m b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$, los valores de las variables básicas
- $z_0 = c_1x_{01} + \ldots + c_mx_{0m} = c_1b_1 + \ldots + c_mb_m$, el valor de la función objetivo en la solución básica factible de esta tabla
- α_{ij} los valores que verifican $A_j = \alpha_{1j} A_1 + \alpha_{2j} A_2 + \ldots + \alpha_{mj} A_m = I_m \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$
- $z_j = c_1\alpha_{1j} + c_2\alpha_{2j} + \ldots + c_m\alpha_{mj}$, que obviamente si k es un índice básico verifica $z_k = c_k$

Si esta solución no es óptima y para algún $z_j - c_j > 0$ existe $\alpha_{ij} > 0$, se busca una nueva solución factible básica, introduciendo en la base el vector A_e, tal que $z_e - c_e =$ máximo $\{z_j - c_j \mid z_j - c_j > 0\}$.

Para calcular la nueva tabla se procede de la siguiente forma:

Sea $\dfrac{x_{0k}}{\alpha_{ke}} = \min \left\{ \dfrac{x_{0i}}{\alpha_{ie}} \mid \alpha_{ie} > 0 \right\}$. Se considera α_{ke}, llamado elemento *pivote*, y se obtiene la tabla correspondiente a la nueva solución básica factible realizando operaciones elementales en la tabla para obtener que α_{ke} sea 1, α_{ie} sea 0 para $k \neq i$ con $i = 1, 2, \ldots, m$, y $z_e - c_e$ sea 0.

Si en la nueva tabla quedan $z_j - c_j > 0$ se repite todo el proceso con esta nueva tabla.

CÁLCULO DE LA SOLUCIÓN FACTIBLE BÁSICA INICIAL

Para iniciar el algoritmo es necesario seleccionar una solución factible básica inicial, para lo que se procede de la siguiente forma.

- Se formula el problema en forma estándar.
- Se multiplican por -1 las restricciones de igualdad cuyo término independiente sea negativo.
- Si en el problema así formulado aparece, como submatriz de A, la matriz I_m, es inmediato obtener una solución factible básica con la que iniciar el algoritmo del simplex tomando I_m como matriz básica.
- Si no aparece la matriz I_m, se pueden añadir unas variables, llamadas **variables artificiales**, como se indica a continuación:
  - Se añaden las variables artificiales necesarias, como mucho una por restricción de igualdad, para obtener I_m como submatriz de A.
  - Se penalizan las variables artificiales introduciéndolas en la función objetivo multiplicadas por M, siendo M un número real positivo suficientemente grande.
  - Se aplica el método del simplex a este programa artificial y entonces:
    * Si al finalizar el algoritmo las variables artificiales son no básicas la solución del programa inicial es la misma que la del artificial eliminando las variables artificiales de la tabla.
    * Si al finalizar el algoritmo alguna variable artificial es básica el programa inicial no tiene solución.

ALGORITMO DEL SIMPLEX PARA EL CASO DE MÁXIMO

En el caso de que el problema sea de maximización, se puede resolver convirtiéndolo en uno de minimización, o bien utilizar el algoritmo del simplex, cambiando el criterio de óptimo, el criterio de entrada y la penalización de las variables artificiales como se muestra a continuación.

Paso 3: Criterio de óptimo para máximo

Según el signo de los valores $z_j - c_j$ para $j = 1, 2, ..., n$ se tienen 3 casos posibles:

1. Si $z_j - c_j \geq 0$, para todo j, entonces x_0^t es solución del programa.
   - Si $z_j - c_j > 0$, para $j = m+1, m+2, ..., n$, entonces la solución x_0^t es única.
   - Si $z_j - c_j = 0$ para algún $j = m+1, m+2, ..., n$, entonces la solución x_0^t no es única.
     - Si algún $\alpha_{ij} > 0$, se introduce el vector A_j en la base y se va al paso 5.
     - Si todos los $\alpha_{ij} \leq 0$, entonces la solución es la semirrecta

$$(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m}, 0, ..., 0) + \lambda\,(-\alpha_{1j}, -\alpha_{2j}, ..., -\alpha_{kj}, ..., -\alpha_{mj}, 0, ..., 0, \overset{j)}{1}, 0, ..., 0), \text{ con } \lambda \geq 0$$

2. Si $z_j - c_j < 0$, para algún $j = m+1, m+2, ..., n$, y las correspondientes $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ..., \alpha_{mj}$ son no positivas, entonces el programa no tiene solución.

3. Si $z_j - c_j < 0$, para algún $j = m+1, m+2, ..., n$, y algún $\alpha_{ij} > 0$, entonces x_0^t no es solución del programa. Se va al paso siguiente.

Paso 4: Criterio de entrada para máximo

Si $z_e - c_e = \min \{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\}$, la variable x_e pasa de ser no básica a ser básica, es decir, entra en la matriz básica la columna A_e. Se va al paso siguiente.

Penalización de las variables artificiales

Si es necesario introducir variables artificiales para obtener una solución factible básica inicial, estas se penalizan introduciéndolas en la función objetivo multiplicadas por $-M$, siendo M un número real positivo suficientemente grande.