Tema 2. Programación sin restricciones

1. Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones en su dominio de definición:

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$

b) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $f(x,y) = xy^2$

d) $f(x,y) = x^2 - y^2$

e) $f(x,y) = (x - y)^4$

f) $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

g) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

h) $f(x,y) = x^4 + 8x^2 + y^2 - 4y$

i) $f(x,y) = xy$

j) $f(x,y) = x^2y - y^2$

k) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

l) $f(x,y) = xye^{x+2y}$

ll) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

m) $f(x,y) = x^2y^2$

n) $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$

ñ) $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 4y + 1$

o) $f(x,y) = \left(x - y + 1\right)^2$

p) $f(x,y) = \left(x - y\right)^4 + \left(y - 1\right)^2$

q) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

r) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

s) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 10 + e^{x+y}$

t) $f(x,y,z) = 3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2yz + 6xz - 2xy$

u) $f(x,y,z) = xyz$

v) $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 16yz$

2. Calcular los óptimos locales de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$ según los valores del parámetro real a.

3. Determinar, si existen, los óptimos locales de $f(x,y) = x^4 + y^4 - \left(x - y\right)^3$.

4. Sea la función $f(x,y) = ax^2 + by^2 - 4x + 2y + c$. Hallar el valor de los parámetros reales a, b y c para que el valor mínimo de esta función sea 10 y se alcance en el punto (2,-1).

5. Dada la función $f(x,y) = 9x^2 + y^2 + 6xy + 1$:

a) Determinar, si existen, los extremos locales de $f(x, y)$.

b) Los extremos calculados en el apartado a), ¿son globales?. Razonar la respuesta.

6. Dada la función $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$:

a) Determinar, si existen, los óptimos locales de $f(x, y)$.

b) ¿Existen óptimos globales de $f(x, y)$?. Razonar la respuesta.

7. Dada la función $f(x, y, z) = -x^2 - 5x - y^2 + 2yz + 6y - 4z^2 - 4z - 14$:

a) Determinar, si existen, los extremos locales de $f(x, y, z)$.

b) ¿Existe máximo global y mínimo global de $f(x, y, z)$?. Razonar la respuesta.

8. Un agricultor utiliza trabajo y fertilizantes como únicos factores para cultivar un campo, siendo x e y los costes de estos factores, respectivamente. Si el beneficio por unidad de superficie viene dado por la función $B(x, y) = 20x + 26y + 4xy - 4x^2 - 3y^2$, encontrar los valores de x e y que maximizan el beneficio.

9. Una compañía fabrica un producto en dos factorías. El coste de producción de x unidades en la primera factoría es $c_1 = \frac{1}{5}x^2 + 40x + 5000$ y el coste de producción de y unidades en la segunda factoría es $c_2 = \frac{1}{4}y^2 + 20y + 1375$. Si el producto se vende a 150 euros la unidad, hallar la cantidad que debe producirse en cada factoría para maximizar el beneficio.

10. Una empresa produce dos bienes con una función de coste $C(q_1, q_2) = \frac{3}{2}q_1^2 + 3q_1q_2 + 2q_2^2 + 34$. Sabiendo que puede vender estos bienes al mercado a unos precios $p_1 = 42$ y $p_2 = 51$, calcular los niveles de producción que proporcionan a la empresa el máximo beneficio.

11. La función de coste total de un monopolista que produce dos bienes viene dada por $C(q_1, q_2) = \frac{1}{6}q_1^2 - 10q_2 + 90$, donde q_1 y q_2 representan las cantidades producidas de dichos bienes. Supongamos que las demandas a las que se enfrenta la empresa son $q_1 = 680 - 5p_1 - 3p_2$ y $q_2 = 430 - 3p_1 - 2p_2$ donde p_1 y p_2 son los precios de cada uno de los bienes. Calcular los niveles de producción que proporcionan al empresario el máximo beneficio.

12. Determinar el nivel de producción de un bien q y el nivel de empleo de factores x_1, x_2 con los que una empresa maximiza sus beneficios siendo $q(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$ la función de producción, $C(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 + 5$ la función de costes y $p = 15$ el precio unitario de venta del producto.