Problemas del tema 3

1. Sea $f(x,y) = e^x + e^y$, se pide:

a) ¿Existe algún punto óptimo de *f*?.

b) Si se considera la función *f* sujeta a la restricción $x + y = 2$, ¿existe algún punto óptimo?.

2. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$:

a) ¿Existe algún punto óptimo de *f*?.

b) Escribir una restricción de forma que los puntos obtenidos en a) no sean solución del problema restringido.

c) Si se considera la función *f* sujeta a la restricción $x + y = 1$, ¿existe algún punto óptimo?.

3. Sea la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + bxy + az$, siendo *a* y *b* parámetros reales.

a) Estudiar para que valores de los parámetros *a* y *b*, el punto (1, 1, 1) es máximo, mínimo o no es extremo.

b) Obtener una relación entre los parámetros *a* y *b* que sea una condición necesaria para que el punto (1, 1, 1) sea un óptimo local de *f* sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

4. Comprobar que el punto (1, 0, 0) es solución del problema:

$$\text{Minimizar} \quad f(x,y,z) = x + y + x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{s.a:} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Comprobar que el punto (1, 0, 0) no verifica las condiciones necesarias de primer orden de Lagrange. ¿Cuál es la razón de esta aparente contradicción?.

5. Dado el programa

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & f(x,y) = x^2 \\ \textit{s.a}: & x^4 + 2x^2y^2 + y^2 = 4x^2 \end{array}$$

a) Escribir las condiciones de Lagrange del problema.

b) ¿Debe el punto $(0,0)$ satisfacer las condiciones de Lagrange para ser óptimo?

c) Calcular los candidatos a puntos óptimos.

d) Sabiendo que el conjunto factible es compacto (cerrado y acotado) determina los máximos y mínimos globales.

6. Calcular los extremos locales de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $y + x^2 = 1$.

7. Calcular los extremos locales de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 1$.

8. Calcular los extremos locales de la función $f(x, y, z) = xyz$ sujeta a la restricción $x + y + z = 1$.

9. Calcular los extremos locales de la función $f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ sujeta a las restricciones: $2x + 3y = 6$, $4y - z = 1$, $y + z + t = 15$.

10. Determinar los óptimos locales de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se indican:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2$

s.a: $x + y + z^2 = 4$

b) $f(x,y,z) = 2x + y - z$

s.a: $x^2 + y^2 - z = 0$

c) $f(x,y,z) = x^2 - y + 2z$

s.a: $x^2 + y^2 + 4z^2 = 8$

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

s.a: $\begin{cases} x + y + z = 14 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

e) $f(x,y,z) = -x^2 + 2y + z$

s.a: $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

f) $f(x,y) = x + y$

s.a: $x^2 + y^2 = 1$

g) $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 + 2x$

s.a: $x^2 + y^2 = 1$

h) $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2$

s.a: $x^2 + y^2 = 8$

i) $f(x,y) = xy$

s.a: $x^2 + y^2 = 1$

j) $f(x,y) = x^2 + y^2$

s.a: $ln(xy) = 1$

11. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio r.

12. Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & 3x+4y \\ s.a: & x^2+y^2=25 \end{array}$$

a) Determinar, si existen, los puntos críticos de la Lagrangiana del problema.

b) Clasificar los puntos críticos obtenidos en el apartado a).

c) ¿Podemos afirmar que los extremos obtenidos en el apartado b) son globales?

13. Resolver el siguiente problema de optimización utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & x+y \\ s.a: & xy-1=0 \end{array}$$

14. Sea $f(x,y,z)=x+2y+2z$:

a) Calcular, si existen, los óptimos locales de f en $S=\{(x,y,z)\in R^3 : x+4z^2=5\}$.

b) Calcular, si existen, los óptimos locales de f en $T=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+4z^2=6\}$.

15. Sea $f(x,y)=\dfrac{y-x}{y}$. Estudiar la existencia de máximos y mínimos relativos condicionados a la restricción $x-y^2=1$.

16. Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar} & f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \\ s.a: & \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{array} \end{array}$$

a) Determinar, si existen, los óptimos locales.

b) Analizar si se trata de óptimos globales. Razonar la respuesta.

17. Para el problema

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x + y - 2z \\ s.a: & x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{array}$$

a) Calcular los puntos críticos y clasificarlos.

b) ¿Qué se puede decir acerca de la globalidad de los extremos?

18. Sea el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x^2 y^2 \\ s.a: & xy + y = 1 \end{array}$$

a) Determinar los puntos críticos de la función Lagrangiana del problema.

b) Clasificar los puntos obtenidos en el apartado anterior.

19. Dado el problema

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x^2 - y^2 \\ s.a: & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

a) El conjunto factible ¿es convexo?, ¿es cerrado?, ¿es acotado? Justificarlo.

b) Hallar los puntos críticos de la función Lagrangiana asociada y clasificarlos.

c) Sin necesidad de volver a resolver el problema, y si el término independiente de la restricción es 1´1 en lugar de 1, contestar razonadamente a la pregunta: ¿los valores óptimos mejoran o empeoran?

20. Determinar, usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, los extremos relativos condicionados del siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} Optimizar & y^2 + x^2 y - y + 10 \\ s.a: & y - x^2 = 0 \end{array}$$

21. Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} Optimizar & f(x,y) = a\,x^2 + b\,xy - a\,x - 2b\,y - 5x \quad (a,b \in R) \\ s.a: & x = y \end{array}$$

a) Determinar las condiciones que deben cumplir los parámetros a y b para que el punto $(1,1)$ sea un punto crítico del programa.

b) Para $b=1$, analizar el carácter del punto $(1,1)$.

22. Dado el problema

$$\begin{array}{ll} Optimizar & f(x,y,z) = x^2 + y^2 \\ s.a: & 4x - 3y + 2z = 6 \end{array}$$

analizar la existencia de óptimos globales y calcularlos en su caso.

23. Dado el programa

$$\begin{array}{ll} Optimizar & x^2 + y^2 \\ s.a: & y + x^2 = 1 \end{array}$$

a) Resolverlo por el método de Lagrange.

b) Sin resolver el programa $\begin{array}{ll} Optimizar & x^2 + y^2 \\ s.a: & y + x^2 = 0,9 \end{array}$, analizar si los óptimos de este nuevo programa mejoran o empeoran respecto del programa del apartado anterior.

24. Dado el programa

$$\begin{array}{ll} Optimizar & xy + z^2 \\ s.a: & 2x - y + z = 0 \end{array}$$

a) Calcular, si existen, los óptimos locales con el método de Lagrange.

b) Calcular, si existen, los óptimos globales.

25. Dado el problema:

$$\begin{array}{rl} \textit{Optimizar} & x - 3y \\ s.a: & x - y^3 = 0 \end{array}$$

a) Utilizando el método de Lagrange calcular los candidatos a extremos locales.

b) Clasificar los puntos obtenidos en el apartado anterior.

26. Dada la función $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$,

a) Calcular sus extremos relativos condicionados sobre el conjunto $\{(x, y) \in R^2 : y = x^2 - 1\}$.

b) ¿El punto $(0, -1)$ es máximo global del problema anterior? (Puede ayudar la representación gráfica del problema).

27. Dado el programa

$$\begin{array}{rl} \textit{Optimizar} & x\ln(y) \\ s.a: & y - yx = 1 \end{array}$$

a) Calcular el valor de λ para que $(0, 1, \lambda)$ sea punto crítico de la función Lagrangiana del problema.

b) Determinar si el punto $(0, 1)$ es un extremo local del problema anterior.

28. Considerando el problema

$$\begin{array}{rl} \textit{Optimizar} & 10x^2 - 16xy + 10y^2 \\ s.a: & x^2 + y^2 = 2 \end{array}$$

a) Calcular sus puntos críticos.

b) Utilizando condiciones de segundo orden clasificar los puntos del apartado a).

c) Razonar sobre la globalidad de los puntos obtenidos en el apartado a).

29. La función de utilidad de un consumidor es $U(x, y) = (x + 2)(y + 1)$ donde x e y representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidos en un periodo de tiempo dado. Sea 4 u.m. el precio unitario del bien 1, 6 u.m. el precio unitario del bien 2 y 130 u.m. el presupuesto de que dispone el consumidor que se gasta totalmente. Se pide:

a) Calcular la cantidad a consumir de cada bien si el objetivo es maximizar la utilidad.

b) ¿Cuál es la variación que experimenta la utilidad máxima ante un cambio en la cantidad de presupuesto disponible?

30. La función de producción de una empresa es $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, siendo x, y, z la cantidad, en miles de unidades, de los tres inputs que utiliza.

a) Hallar la cantidad de cada input que maximiza la producción, sabiendo que deben consumirse 6000 unidades entre los tres.

b) ¿Qué variación experimentará la producción máxima si se debe consumir 6100 unidades entre los tres inputs?

31. Una empresa produce y comercializa dos bienes, X e Y. El beneficio de la venta de dichos bienes está expresado por la función $B(x, y) = ln(x - 2)^2 + ln(y - 1)^3$ siendo x e y el número de unidades vendidas del bien X e Y, respectivamente. Se sabe que se dispone de 240 unidades de materia prima para producir ambos factores; cada unidad de bien X precisa 10 unidades de dicha materia prima para su fabricación y cada unidad de bien Y 20 unidades. La materia prima ha de agotarse en su totalidad en el proceso de fabricación. Se pide:

a) Escribir un programa matemático con el que se pueda calcular el número de unidades del bien X y del Y que se han de fabricar para que el beneficio sea máximo, suponiendo que se vende todo lo que se produce.

b) Resolver el programa matemático planteado.

c) ¿Qué precio máximo estaría dispuesta a pagar la empresa por una unidad adicional de materia prima? Justificar la respuesta.

32. La población productiva de una pequeña ciudad se divide en dos grupos, uno fabrica el bien A y el otro el bien B. Ambos bienes se exportan en su totalidad, percibiendo 12.5 u.m. por unidad del bien A y 100 u.m. por unidad del bien B. Las posibilidades de producción anual se hallan limitadas por la función de transformación $10x + 4y^2 = 10000$, siendo x el número de unidades producidas del bien A e y el número de unidades producidas del bien B. Se pide:

a) Calcular el número de unidades anuales de cada bien con las que se maximiza el ingreso conjunto de los productores de esta ciudad.

b) Sin volver a resolver el problema, razonar cómo variaría el ingreso máximo si se considerara la función de transformación $10x + 4y^2 = 10001$.

33. Una empresa produce un bien a partir de dos factores productivos X e Y siendo su función de producción $q(x, y) = 40x + 60y - x^2 - 3y^2$, donde x representa la cantidad de factor X e y la de factor Y. Los precios unitarios de los factores productivos son 1 y 2 unidades monetarias, respectivamente. Se pide:

a) Sabiendo que los costes de los factores productivos han de ser de 26 u.m., calcular la cantidad de cada factor productivo que se ha de utilizar si se quiere maximizar la producción. Calcular también la producción máxima.

b) Sin volver a resolver el problema, ¿cuánto variará la producción máxima si el coste de los factores productivos ha de ser de 26´1 u.m.?

34. Una empresa emplea dos factores A y B, en cantidades x e y, para obtener un determinado producto. La función de costes viene dada por $C(x,y) = 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 10$. Fijado el nivel de producción en 8 unidades, la tecnología utilizada para alcanzar dicho nivel viene determinada por $Q(x,y) = x^2 + y^2$.

a) ¿Qué combinación de factores minimizará el coste de la empresa para el nivel de producción fijado? ¿Cuál sería en este caso el coste de la empresa?

b) Si la empresa se planteara aumentar en una pequeña cantidad su nivel de producción, ¿disminuirían con ello los costes? Razonar la respuesta.

35. Las preferencias de un consumidor que demanda cantidades de dos bienes están representadas por la función de utilidad: $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2$, donde x_1 indica la cantidad del bien 1 y x_2 la cantidad del bien 2. Dicho consumidor dispone de una renta monetaria de R euros que gasta íntegramente en el consumo de los bienes. Sabiendo que los precios son p_1, p_2:

a) Determine las cantidades que demandará el consumidor de ambos bienes en función de los precios y de la renta, de manera que su utilidad sea máxima. ¿Qué combinación elegirá si los precios son $p_1 = 5$, $p_2 = 4$ y la renta es $R = 150$?

b) ¿Cuánto variará la utilidad del consumidor si dispusiese de una renta igual a 300 euros?

c) Suponga ahora que las preferencias del consumidor vienen representadas por la función de utilidad: $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} + x_2$. Determine la nueva combinación de cantidades que elegirá cuando los precios y la renta son, respectivamente, $p_1 = 5$, $p_2 = 4$, $R = 150$. ¿Variará la utilidad del individuo si su renta se dobla? Razone la respuesta.