Tema 5. Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

1.- Comprobar que la función $y = C_1 senx + C_2 x$ es solución de la ecuación diferencial $(1 - xcotgx)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

2.- a) Comprobar que la función $y = 2x + Ce^x$ es solución de la ecuación diferencial $y' - y = 2(1 - x)$. Hallar la solución particular que pasa por el punto (0, 3).

b) Comprobar que la función $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$. Hallar la solución particular que pasa por los puntos (0, 0) y (1, 0).

3.- Considerar la ecuación diferencial $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$.

a) Resolver la ecuación usando separación de variables

b) Si denominamos por C a la constante de integración, demostrar que cuando dicha constante toma el valor -1, no hay valores reales de x e y que satisfagan la solución.

c) Si bien C es una constante arbitraria de integración, demostrar que solamente para $C > 0$ se obtiene una relación implícita entre x e y.

4.- Considerar la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$.

a) Determinar la solución general de la ecuación dada.

b) Comprobar que la ecuación anterior con valor inicial $y(0)=0$ no tiene solución única.

c) ¿Porqué este ejemplo no contradice el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales con valor inicial dado?

5.- a) Demostrar que la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 - y^2}$ es homogénea.

b) Resolverla utilizando la sustitución adecuada.

6.- a) Probar que es exacta la ecuación diferencial: $\dfrac{e^{\sqrt{x+y^2}}}{2\sqrt{x+y^2}}dx + \dfrac{y\,e^{\sqrt{x+y^2}}}{\sqrt{x+y^2}}dy = 0$.

b) Encontrar la solución general de la ecuación anterior.

c) Demostrar, a partir de la solución encontrada, que la función $x = 3 - y^2$ es una solución.

7.- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $y' = 2x(y + 3)$

2) $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$

3) $\left(2xy^3 + 1\right)dx + \left(3x^2y^2 - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$

4) $\left(-3x^2 + y\right)dx + \left(x - 1\right)dy = 0$

5) $y' = \dfrac{y \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x \cos y + \cos x}$

6) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{1+x^2} - 2xy}{x^2}$

7) $y\, x^{y-1}\, dx + x^y \ln x \, dy = 0$

8) $(6xy^2 + 2x^2)dx + (4y^3 + 6x^2 y)dy = 0$

9) $y' = 2xe^{-x^2} - 2yx$

10) $(1+x^2)y' - 4xy + (1+x^2)^2(2-x) = 0$

11) $x \dfrac{dy}{dx} - y + 3x^3 y - x^4 = 0$

12) $y \ln(1+x)\, dx - \dfrac{dy}{1+3x^2} = 0$

13) $y'\left(x^2+1\right) = x^2 + 2xy + 1$

14) $\dfrac{1}{x} \operatorname{sen} y \, dx + \ln x \cos y \, dy = 0$

15) $x y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

16) $\left(-3x + y + 6\right)dx + \left(x + y + 2\right)dy = 0$

17) $(1+x)^3\, dy - x^2 y\, dx = 0$

18) $x^3\, dx + (y+1)^2\, dy = 0$

19) $\left(x+y\right)dx - \left(x-y\right)dy = 0$

20) $\left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2 - xy\right)dy = 0$

21) $x^2\, dy - \left(xy + y\sqrt{x^2+y^2}\right)dx = 0$

22) $y' + 5y = t^3 e^t$

23) $\left(x^3 + xy^2\right)dx + \left(x^2 y + y^3\right)dy = 0$

24) $\left(1 + 2e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 2e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

25) $y' = \dfrac{2 + y e^{xy}}{2y - x e^{xy}}$

26) $y' = \dfrac{2xy - y^2}{x^2}$

27) $\left(x^3+1\right)y' + 6x^2 y = x e^x$

28) $\left(1 + e^x y + x e^x y\right)dx + \left(x e^x + 2\right)dy = 0$

29) $\left(xy + y^2 + x^2\right)dx - x^2\, dy = 0$

30) $x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2+y^2}\, dx$

31) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

32) $y' = \dfrac{x^2 y - y}{y+1}$

8.- Obtener la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\left(\ln(y+1) - 3x^2 y - 6e^{2x}\right)dx + \left(\dfrac{x}{1+y} - x^3 + \cos y\right)dy = 0$.

b) $\left(\dfrac{y}{3+x} - y^2 + \operatorname{sen} x\right)dx + \left(\log(x+3) - 2xy - e^{y-1}\right)dy = 0$.

9.- Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales que verifica la condición inicial dada:

1) $y' = \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$

2) $\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{z}{x} = x$, $z(1) = 0$

3) $x y' - 4y + 2x^2 + 4 = 0$, $y(1) = 1$

4) $y\, dx + (x - y e^y)\, dy = 0$, $y(1) = 0$

5) $y' = \dfrac{\cos x}{2y}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

6) $(1+e^x)\,y\,y' = e^x$, $y(0) = 1$

7) $y' = -\dfrac{2xy}{x^2+y}$, $y(0) = 2$

8) $\left(2x + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$, $y(1) = 1$

9) $y' = y\,(1+x)$, $y(0) = 1$

10) $(x^2+1)\,y' + 4\,x\,y = x^2 + 2\,x - 1$, $y(0) = 3$

11) $y' = \dfrac{-x}{y}$, $y(2) = 2$

12) $y' = \dfrac{2\,x\,y}{x^2 - y^2}$, $y(1) = 1$

10.- Hallar la curva que pasa por el punto $(1,-1)$ y verifica la ecuación diferencial:

$$\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)dx = \left(1 - \ln x\right)dy\,.$$

11.- Dada la ecuación $y' = x\,y\,Ln\,x$:

a) Calcular su solución general.

b) Calcular la solución particular que verifica $y(1) = 1$.

12.- Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

a) $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x^2} - x\,e^{1/x} = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$ b) $\begin{cases} y' = \dfrac{1+2x}{e^y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\,x^2 - y}{x - 4\,y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$

13.- Dada la ecuación diferencial $y\,dx + x\,(x^2\,y - 1)\,dy = 0$, se pide:

a) Comprobar que no es exacta.

b) Comprobar que al multiplicar la ecuación diferencial por la función $m(x,y) = \dfrac{y}{x^3}$ se obtiene una ecuación diferencial exacta.

c) Resolver la ecuación diferencial obtenida en el apartado anterior.

14.- Dada la ecuación diferencial $2\,x\,y\,dx + \left(5\,x^2 + 2\,y\right)dy = 0$, se pide:

a) Comprobar que no es exacta.

b) Comprobar que al multiplicar la ecuación diferencial por la función y^4 se obtiene una ecuación diferencial exacta.

c) Encontrar la solución implícita de la ecuación diferencial obtenida en el apartado anterior.

15.- Considerar la ecuación diferencial $\left(3\,x\,y - 4\,y^2\right)dx + \left(2\,x^2 - 6\,x\,y\right)dy = 0$.

a) Determinar m de forma que al multiplicar la ecuación diferencial por la función $x\,y^m$ se obtenga una ecuación diferencial exacta.

b) Obtener la solución implícita de la ecuación diferencial obtenida en el apartado a).

c) Hallar la curva que pasa por el punto $(1,1)$ y verifica la ecuación diferencial obtenida en el apartado a).

16.- ¿Cuánto deben de valer los parámetros m, n y p para que $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x}$ sea solución de la ecuación diferencial $y''' + m\, y'' + n\, y' + p\, y = 0$?

17.- a) Escribir una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes cuya solución sea $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$.

b) Resolver la ecuación diferencial: $y''' + 2y'' + y' = 3x^2 - 18$.

18.- a) Determinar una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes cuya solución general sea $C_1\, e^{-3x} + C_2\, x\, e^{-3x} + C_3$.

b) Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal completa obtenida al considerar 27 como término independiente de la ecuación calculada en el apartado a).

19.- Escribir una ecuación diferencial de coeficientes constantes cuya solución general sea:

$$y = C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^{2x} + C_3 .$$

20.- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

1) $y''' + y' + 10\, y = 0$

2) $y''' - 6\, y'' + 11\, y' - 6\, y = 0$

3) $y'' - 3\, y' + 2\, y = 0$

4) $y'' + 4y = 0$

5) $y'' + 5y' + 6y = 0$

6) $y''' - y'' - 2\, y' = 0$

7) $y^{(4} - 4\, y'' = 0$

8) $y^{(4} + y''' = 0$

9) $y'' - y' - 12y = 0$

10) $y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$

11) $y'' - y = 0$

12) $y'' + 4\, y' + 4\, y = 0$

13) $y'' - 5\, y' + 6\, y = 0$

14) $y'' - 2\, y' + 2\, y = 0$

15) $y'' + y = 0$

16) $y'' + 3\, y' + 2\, y = 0$

21.- Determinar, a partir del ejercicio anterior, la forma de una solución particular de las ecuaciones:

1) $y''' + y' + 10\, y = 12\, e^{2x}$

2) $y''' - 6\, y'' + 11\, y' - 6\, y = 2\, x\, e^{-x}$

3) $y'' - 3\, y' + 2\, y = (e^{-x} + e^{x})^2$

4) $y'' + 4y = \cos 2x$

5) $y'' + 5y' + 6y = 9e^{2x} \cos x$

6) $y''' - y'' - 2\, y' = \operatorname{sen} x$

7) $y^{(4} - 4\, y'' = 3x^2 e^{x} + 5x^4$

8) $y^{(4} + y''' = 3 - x$

9) $y'' - y' - 12y = 36\; x\; e^{3x}$

10) $y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 32 + e^{x} e^{x}$

11) $y'' - y = 2\, e^{-x} - 4\, x\, e^{-x} + 10\, \cos 2x$

12) $y'' + 4\, y' + 4\, y = 3\, e^{-2x}$

13) $y'' - 5\, y' + 6\, y = 6x + 1$

14) $y'' - 2\, y' + 2\, y = e^{x}$

15) $y'' + y = e^{-2x} \operatorname{sen} x$

16) $y'' + 3\, y' + 2\, y = 3\, x + 1$

22.- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

1) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 3)\, e^{2x}$

2) $y'' + y' - 2y = 2(3x + 1)\, e^x$

3) $y' - 5y = 3e^x - 2x + 1$

4) $y'' - 4y' + 4y = x$

5) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x - 5$

6) $y^{(4} + y''' - y'' - y' = 9x^2 - 6x + 1$

7) $y''' - y' = 4$

8) $y''' + y' = e^x$

9) $y'' - 4y = 8 \operatorname{sen} 2x - 16 \cos 2x$

10) $y' - y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$

11) $y'' - 4y' + 13y = 40 \operatorname{sen} x$

12) $y''' - 3y' + 2y = x e^x$

13) $y'' - y = 5 + e^x$

14) $2y''' - 10y'' + 12y' = 24x$

15) $y''' + y'' = 6x + 4$

16) $y''' + 6y'' + 8y' = 16x$

17) $y''' - 3y'' + 3y' = y$

18) $y''' - 4y'' - 11y' - 6y = 5e^x + 6x$

19) $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6x e^{2x}$

20) $y'' - y = e^x (x^2 - 1)$

21) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$

22) $y'' + y' + y = 1 + x + x^2$

23) $y^{(4} = y$

24) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x - x^2$

25) $y'' - 4y' + 5y = x - 4$

23.- Para las siguientes ecuaciones diferenciales hallar la solución verifique las condiciones iniciales dadas:

1) $y''' - 4y'' + 4y' = 100$, $y(0) = 50$, $y'(0) = 30$, $y''(0) = 40$.

2) $y''' - y'' + y' - y = 100\, e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

3) $y'' + y = x \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4) $y'' - 4y' + 3 = e^x\,(x + 1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{9}{4}$.

5) $y'' + 9y = x^2 + \cos(3x)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

6) $y''' + y' = 2 \operatorname{sen} x + 3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

7) $y^{(4} + y'' = 24x$, $y(0) = 7$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 21$.

8) $y''' + y' = x - 10 e^x \operatorname{sen} x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = -6$.

24.- Considerar la ecuación diferencial: $y^{(4} + 2y''' - 15y'' = x + (x + 1)\, e^x$. Se pide:

a) Calcular la solución general de la ecuación homogénea asociada.

b) Calcular una solución particular de la ecuación completa.

c) Calcular la solución general de la ecuación completa.

d) Calcular la solución particular de la ecuación completa que verifica: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \dfrac{-3}{25}$, $y'''(0) = \dfrac{-47}{180}$.

25.- Sea P el precio de un bien, $D(P) = 8 - 2P$ la demanda y $S(P) = 2 + P$ la oferta. El precio $P = P(t)$ varía con el tiempo, siendo su ritmo de crecimiento el doble del exceso de demanda, $D(P) - S(P)$. Si inicialmente el precio era de 5 unidades monetarias, calcular el precio en cada instante y determinar qué ocurrirá a largo plazo.

26.- El ritmo al que cambia el precio de venta de un producto respecto a su demanda está dada por la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{y - xe^x}{x}$, donde x representa la demanda e y representa el precio de venta. Hallar el precio de venta del producto, en función de la demanda, para el caso de que éste sea de 4 euros cuando la demanda es de 2 unidades.

27.- Sabiendo que el ritmo de cambio del coste, C, respecto del número de unidades fabricadas, q, viene dado por la ecuación diferencial $\frac{dC}{dq} = -\frac{3q^2C + 1}{q^3 + 2}$. Hallar la función de coste $C(q)$, sabiendo que el coste de producir 2 unidades es 10 euros.

28.- Si S representa la oferta de un cierto producto y p el precio unitario de venta, la razón a la que cambia la oferta respecto al precio viene dada por la expresión $\frac{S(2p+3)}{p(p+3)}$. Hallar la oferta en función del precio, sabiendo que si el precio es de 2 unidades monetarias la oferta es de 20 unidades.

29.- Sea $C(q)$ la función que representa el coste total de producir q unidades de un cierto producto. La razón a la que varía el coste marginal en cualquier punto es constante y su valor es -2. Sabiendo que cuando se produce 1 unidad el coste es de 3 unidades monetarias y cuando se producen 2 unidades el coste es de 7 unidades monetarias, hallar la función de coste total.

30.- Sea I el ingreso por la venta de q unidades de cierto producto. Sabiendo que la razón a la que cambia el ingreso respecto al número de unidades vendidas es $\frac{I}{q} + \frac{24 - q^2}{q}$, hallar el ingreso en función del número de unidades vendidas, sabiendo que éste es de 21 unidades monetarias cuando se venden 5 unidades.

31.- Si B representa el beneficio diario (en euros) de un comerciante cuando vende q unidades de un producto, el ritmo al que cambia dicho beneficio respecto al número de unidades vendidas es $\frac{qB + B^2}{q^2}$. Hallar el beneficio en función del número de unidades vendidas, sabiendo que cuando se venden 10 unidades diarias el beneficio es de 500 euros.

32.- La demanda $D(t)$ y la oferta $S(t)$ de cierto bien están relacionadas con el precio $p(t)$ de dicho bien en cada instante, verificándose:

$$D(t) = 125 - 0.5\, p'(t) - 0.8\, p''(t)$$

$$S(t) = 75 + 1.5\, p'(t) + 0.2\, p''(t)$$

Calcular la trayectoria temporal del precio de equilibrio sabiendo que $p(0) = 45$ y $p'(0) = 35$.

33.- Consideremos un modelo de mercado con expectativas de precios en el que la demanda $D(t)$, la oferta $S(t)$ y el precio $p(t)$ verifican las ecuaciones:

$$D(t) = 16 - 4p(t) + 6\, p'(t) + 4\, p''(t)$$

$$S(t) = -8 + 8\, p(t) - 4\, p'(t) + 6\, p''(t)$$

Calcular la trayectoria temporal del precio de equilibrio para $p(0) = 3$ y $p'(0) = -2.5$.