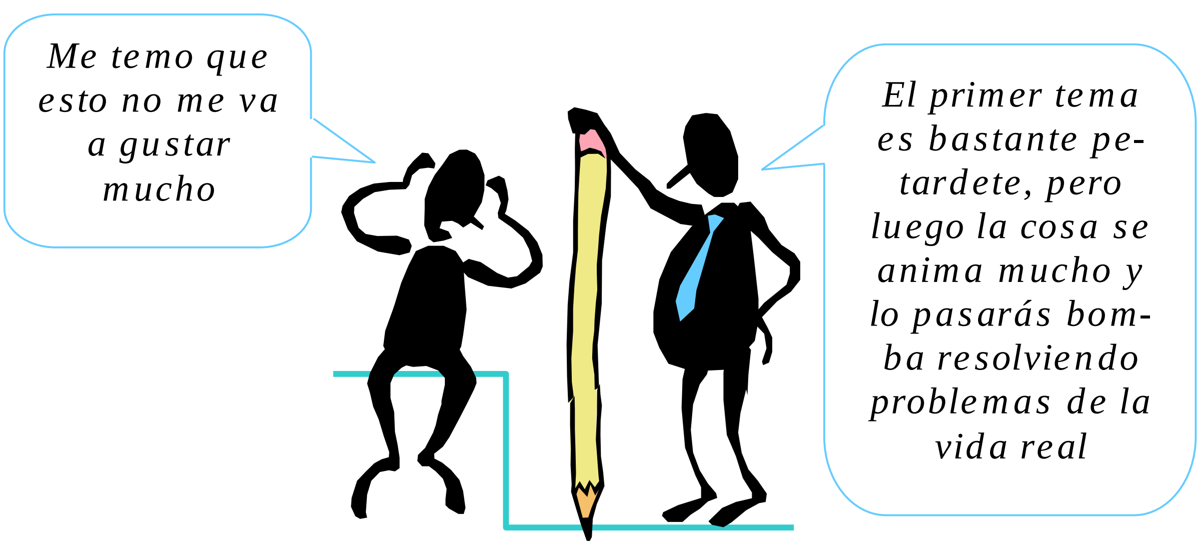
# Tema 1

# Cálculo de primitivas





# 1.5 PRIMITIVAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Se llaman ***hiperbólicas*** a las siguientes funciones:

$$* \ \mathrm{sh}\ u(x) = \frac{e^{u(x)} - e^{-u(x)}}{2} \equiv \text{seno hiperbólico de } u(x)$$

$$* \ \mathrm{ch}\ u(x) = \frac{e^{u(x)} + e^{-u(x)}}{2} \equiv \text{coseno hiperbólico de } u(x)$$

$$* \ \mathrm{th}\ u(x) = \frac{\mathrm{sh}\ u(x)}{\mathrm{ch}\ u(x)} \equiv \text{tangente hiperbólica de } u(x)$$

$$* \ \mathrm{coth}\ u(x) = \frac{\mathrm{ch}\ u(x)}{\mathrm{sh}\ u(x)} \equiv \text{cotangente hiperbólica de } u(x)$$

$$* \ \mathrm{sech}\ u(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}\ u(x)} \equiv \text{secante hiperbólica de } u(x)$$

$$* \ \mathrm{cosech}\ u(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}\ u(x)} \equiv \text{cosecante hiperbólica de } u(x)$$

Las funciones ***hiperbólicas inversas*** son las siguientes, donde "arg" se lee "argumento":

$$* \ f(x) = \arg \mathrm{sh}\ u(x) \Leftrightarrow u(x) = \mathrm{sh}\ f(x)$$

$$* \ f(x) = \arg \mathrm{ch}\ u(x) \Leftrightarrow u(x) = \mathrm{ch}\ f(x)$$

$$* \ f(x) = \arg \mathrm{th}\ u(x) \Leftrightarrow u(x) = \mathrm{th}\ f(x)$$

$$* \ f(x) = \arg \mathrm{coth}\ u(x) \Leftrightarrow u(x) = \mathrm{cth}\ f(x)$$

$$* \ f(x) = \arg \mathrm{sech}\ u(x) \Leftrightarrow u(x) = \mathrm{sech}\ f(x)$$

$$* \ f(x) = \arg \mathrm{cosech}\ u(x) \Leftrightarrow u(x) = \mathrm{cosech}\ f(x)$$

## *Derivación de las funciones hiperbólicas*

01) $f(x) = \mathrm{sh}\ u(x) \quad \Rightarrow f'(x) = u'(x).\mathrm{ch}\ u(x)$

02) $f(x) = \mathrm{ch}\ u(x) \quad \Rightarrow f'(x) = u'(x).\mathrm{sh}\ u(x)$

03) $f(x) = \mathrm{th}\ u(x) \quad \Rightarrow f'(x) = u'(x)/\mathrm{ch}^2\ u(x)$

04) $f(x) = \mathrm{coth}\ u(x) \quad \Rightarrow f'(x) = -u'(x)/\mathrm{sh}^2\ u(x)$

05) $f(x) = \mathrm{sech}\ u(x) \quad \Rightarrow f'(x) = -u'(x).\mathrm{th}\ u(x).\mathrm{sech}\ u(x)$

06) $f(x) = \mathrm{cosech}\ u(x) \quad \Rightarrow f'(x) = -u'(x).\mathrm{coth}\ u(x).\mathrm{cosech}\ u(x)$

07) $f(x) = \arg \mathrm{sh}\ u(x) \quad \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u(x))^2}}$

08) $f(x) = \arg \mathrm{ch}\ u(x) \quad \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2 - 1}}$

09) $f(x) = \arg \mathrm{th}\ u(x) \quad \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1 - (u(x))^2}$

10) $f(x) = \arg \mathrm{coth}\ u(x) \quad \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1 - (u(x))^2}$

11) $f(x)=\arg\operatorname{sech} u(x) \quad \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{u(x).\sqrt{1-(u(x))^2}}$

12) $f(x)=\arg\operatorname{cosech} u(x) \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{u(x).\sqrt{(u(x))^2+1}}$

## *Primitivas inmediatas relacionadas con las funciones hiperbólicas*

1) $\int u'(x).\operatorname{sh} u(x).dx=\operatorname{ch} u(x)+C$

2) $\int u'(x).\operatorname{ch} u(x).dx=\operatorname{sh} u(x)+C$

3) $\int \dfrac{u'(x)}{\operatorname{ch}^2 u(x)}.dx=\operatorname{th} u(x)+C$

4) $\int \dfrac{u'(x)}{\operatorname{sh}^2 u(x)}.dx=-\operatorname{cth} u(x)+C$

5) $\int \dfrac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2+a^2}}.dx=\arg\operatorname{sh}\dfrac{u(x)}{a}+C$

6) $\int \dfrac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2-a^2}}.dx=\arg\operatorname{ch}\dfrac{u(x)}{a}+C$

7) $\int \dfrac{u'(x)}{a^2-(u(x))^2}.dx=\dfrac{1}{a}.\arg\operatorname{th}\dfrac{u(x)}{a}+C$

## EJEMPLOS

$\boxed{1.5.1}$ $\int x^2.\operatorname{sh} x^3.dx=\dfrac{1}{3}.\int 3.x^2.\operatorname{sh} x^3.dx=\dfrac{1}{3}.\operatorname{ch} x^3+C$

* Tipo: $\int u'(x).\operatorname{sh} u(x).dx=\operatorname{ch} u(x)+C$
* En nuestro caso es $u(x)=x^3 \Rightarrow u'(x)=3.x^2$
* Multiplicamos y dividimos por 3 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.2}$ $\int e^{2.x}.\operatorname{sh} e^{2.x}.dx=\dfrac{1}{2}.\int 2.e^{2.x}.\operatorname{sh} e^{2.x}.dx=\dfrac{1}{2}.\operatorname{ch} e^{2.x}+C$

* Tipo: $\int u'(x).\operatorname{sh} u(x).dx=\operatorname{ch} u(x)+C$
* En nuestro caso es $u(x)=e^{2.x} \Rightarrow u'(x)=2.e^{2.x}$
* Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.3}$ $\int \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.dx=2.\int \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{2.\sqrt{x}}.dx=2.\operatorname{ch}\sqrt{x}+C$

* Tipo: $\int u'(x).\operatorname{sh} u(x).dx=\operatorname{ch} u(x)+C$
* En nuestro caso es $u(x)=\sqrt{x} \Rightarrow u'(x)=1/(2.\sqrt{x})$
* Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

1.5.4

$$\int \frac{\text{sh Ln x}}{x}.dx = \text{ch Ln x} + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{sh } u(x).dx = \text{ch } u(x) + C$

$*$ En nuestro caso es $u(x) = \text{Ln x} \Rightarrow u'(x) = 1/x$

1.5.5

$$\int \frac{x.\text{sh}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.dx = \text{ch}\sqrt{1+x^2} + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{sh } u(x).dx = \text{ch } u(x) + C$

$*$ En nuestro caso es $u(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow u'(x) = x/\sqrt{1+x^2}$

1.5.6

$$\int \frac{3.\text{sh}(\text{tg } 3.x)}{\cos^2 3.x}.dx = \text{ch}(\text{tg } 3.x) + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{sh } u(x).dx = \text{ch } u(x) + C$

$*$ En nuestro caso es $u(x) = \text{tg } 3.x \Rightarrow u'(x) = 3/\cos^2 3.x$

1.5.7

$$\int \cos x.\text{sh}(\text{sen } x).dx = \text{ch}(\text{sen } x) + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{sh } u(x).dx = \text{ch } u(x) + C$

$*$ En nuestro caso es $u(x) = \text{sen } x \Rightarrow u'(x) = \cos x$

1.5.8

$$\int x^3.\text{ch } x^4.dx = \frac{1}{4}.\int 4.x^3.\text{ch } x^4.dx = \frac{1}{4}.\text{sh } x^4 + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{ch } u(x).dx = \text{sh } u(x) + C$

$*$ En nuestro caso es $u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4.x^3$

$*$ Multiplicamos y dividimos por 4 para que sea inmediata

1.5.9

$$\int e^{2.x}.\text{ch } e^{2.x}.dx = \frac{1}{2}.\int 2.e^{2.x}.\text{ch } e^{2.x}.dx = \frac{1}{2}.\text{sh } e^{2.x} + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{ch } u(x).dx = \text{sh } u(x) + C$

$*$ En nuestro caso es $u(x) = e^{2.x} \Rightarrow u'(x) = 2.e^{2.x}$

$*$ Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

1.5.10

$$\int \frac{\text{ch}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.dx = 2.\int \frac{\text{ch}\sqrt{x}}{2.\sqrt{x}}.dx = 2.\text{sh}\sqrt{x} + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{ch } u(x).dx = \text{sh } u(x) + C$

$*$ En nuestro caso es $u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = 1/(2.\sqrt{x})$

$*$ Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.11}$ $$\int \frac{\text{ch Ln } x^5}{x}.dx = \frac{1}{5}.\int \frac{5.\text{ch Ln } x^5}{x}.dx = \frac{1}{5}.\text{sh Ln } x^5 + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{ch } u(x).dx = \text{sh } u(x) + C$
$*$ En nuestro caso es $u(x) = \text{Ln } x^5 \Rightarrow u'(x) = 5/x$
$*$ Multiplicamos y dividimos por 5 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.12}$ $$\int \frac{x.\text{ch}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.dx = \text{sh}\sqrt{1+x^2} + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{ch } u(x).dx = \text{sh } u(x) + C$
$*$ En nuestro caso es $u(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow u'(x) = x/\sqrt{1+x^2}$

$\boxed{1.5.13}$ $$\int \frac{3.\text{ch}(\text{tg } 3.x)}{\cos^2 3.x}.dx = \text{sh}(\text{tg } 3.x) + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{ch } u(x).dx = \text{sh } u(x) + C$
$*$ En nuestro caso es $u(x) = \text{tg } 3.x \Rightarrow u'(x) = 3/\cos^2 3.x$

$\boxed{1.5.14}$ $$\int \cos x.\text{ch}(\text{sen } x).dx = \text{sh}(\text{sen } x) + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).\text{ch } u(x).dx = \text{sh } u(x) + C$
$*$ En nuestro caso es $u(x) = \text{sen } x \Rightarrow u'(x) = \cos x$

$\boxed{1.5.15}$ $$\int \frac{x^3}{\text{ch}^2 x^4}.dx = \frac{1}{4}.\int \frac{4.x^3}{\text{ch}^2 x^4}.dx = \frac{1}{4}.\text{th } x^4 + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).dx/\text{ch}^2 u(x) = \text{th } u(x) + C$
$*$ En nuestro caso es $u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4.x^3$
$*$ Multiplicamos y dividimos por 4 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.16}$ $$\int \frac{5^x}{\text{ch}^2 5^x}.dx = \frac{1}{\text{Ln } 5}.\int \frac{5^x.\text{Ln}5}{\text{ch}^2 5^x}.dx = \frac{1}{\text{Ln } 5}.\text{th } 5^x + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).dx/\text{ch}^2 u(x) = \text{th } u(x) + C$
$*$ En nuestro caso es $u(x) = 5^x \Rightarrow u'(x) = 5^x.\text{Ln } 5$
$*$ Multiplicamos y dividimos por Ln 5 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.17}$ $$\int \frac{dx}{x.\text{ch}^2 \text{Ln } x^7} = \frac{1}{7}.\int \frac{7.dx}{x.\text{ch}^2 \text{Ln } x^7} = \frac{1}{7}.\text{th Ln } x^7 + C$$

$*$ Tipo: $\int u'(x).dx/\text{ch}^2 u(x) = \text{th } u(x) + C$
$*$ En nuestro caso es $u(x) = \text{Ln } x^7 \Rightarrow u'(x) = 7/x$
$*$ Multiplicamos y dividimos por 7 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.18}$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}.ch^2\sqrt{x}} = 2.\int \frac{dx}{2.\sqrt{x}.ch^2\sqrt{x}} = 2.th\sqrt{x} + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx/ch^2\ u(x) = th\ u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = 1/(2.\sqrt{x})$
* Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.19}$ $$\int \frac{sen\ x}{ch^2(cos\,x)}.dx = -\int -\frac{sen\ x}{ch^2(cos\,x)}.dx = -th(cos\ x) + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx/ch^2\ u(x) = th\ u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = cos\ x \Rightarrow u'(x) = -sen\ x$
* Multiplicamos y dividimos por $-1$ para que sea inmediata

$\boxed{1.5.20}$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}.ch^2\sqrt{1-x}} = -2.\int -\frac{dx}{2.\sqrt{1-x}.ch^2\sqrt{1-x}} = -2.th\sqrt{1-x} + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx/ch^2\ u(x) = th\ u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow u'(x) = -1/(2.\sqrt{1-x})$
* Multiplicamos y dividimos por $-2$ para que sea inmediata

$\boxed{1.5.21}$ $$\int \frac{x^4}{sh^2\ x^5}.dx = \frac{1}{5}.\int \frac{5.x^4}{sh^2\ x^5}.dx = -\frac{1}{5}.coth\ x^5 + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx/sh^2\ u(x) = -coth\ u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = x^5 \Rightarrow u'(x) = 5.x^4$
* Multiplicamos y dividimos por 5 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.22}$ $$\int \frac{7^x}{sh^2\ 7^x}.dx = \frac{1}{Ln\ 7}.\int \frac{7^x.Ln 7}{sh^2\ 7^x}.dx = -\frac{1}{Ln\ 7}.coth\ 7^x + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx/sh^2\ u(x) = -coth\ u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = 7^x \Rightarrow u'(x) = 7^x{:}Ln\ 7$
* Multiplicamos y dividimos por Ln 7 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.23}$ $$\int \frac{dx}{(1+x).sh^2\,Ln\,(1+x)} = -coth\,Ln\,(1+x) + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx/sh^2\ u(x) = -coth\ u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = Ln\ (1+x) \Rightarrow u'(x) = 1/(1+x)$

$\boxed{1.5.24}$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}.sh^2\sqrt{x}} = 2.\int \frac{dx}{2.\sqrt{x}.sh^2\sqrt{x}} = -2.coth\sqrt{x} + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx/sh^2\ u(x) = -coth\ u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = 1/(2.\sqrt{x})$
* Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

**1.5.25** $$\int \frac{\cos x}{sh^2(\operatorname{sen} x)}.dx = -\coth(\operatorname{sen} x) + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx / sh^2\ u(x) = -\coth u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow u'(x) = \cos x$

**1.5.26** $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}.sh^2\sqrt{1+x}} = 2.\int \frac{dx}{2.\sqrt{1+x}.sh^2\sqrt{1+x}} = -2.\coth\sqrt{1+x} + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx / sh^2\ u(x) = -\coth u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow u'(x) = 1/(2.\sqrt{1+x})$
* Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

**1.5.27** $$\int \frac{x}{9-x^4}.dx = \frac{1}{2}.\int \frac{2.x}{9-x^4}.dx = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\arg\operatorname{th}\frac{x^2}{3} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2-(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\arg\operatorname{th}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ (u(x))^2 = x^4 \Rightarrow u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2.x \end{cases}$
* Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

**1.5.28** $$\int \frac{x^2}{7-x^6}.dx = \frac{1}{3}.\int \frac{3.x^2}{7-x^6}.dx = \frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt{7}}\arg\operatorname{th}\frac{x^3}{\sqrt{7}} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2-(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\arg\operatorname{th}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7} \\ (u(x))^2 = x^6 \Rightarrow u(x) = x^3 \Rightarrow u'(x) = 3.x^2 \end{cases}$
* Multiplicamos y dividimos por 3 para que sea inmediata

**1.5.29** $$\int \frac{3.e^{3.x}}{4-e^{6.x}}.dx = \frac{1}{2}.\arg\operatorname{th}\frac{e^{3.x}}{2} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2-(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\arg\operatorname{th}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ (u(x))^2 = e^{6.x} \Rightarrow u(x) = e^{3x} \Rightarrow u'(x) = 3.e^{3.x} \end{cases}$

**1.5.30** $$\int \frac{\cos x}{5-\operatorname{sen}^2 7.x}.dx = \frac{1}{7}.\int \frac{7.\cos x}{5-\operatorname{sen}^2 7.x}.dx = \frac{1}{7}.\frac{1}{\sqrt{5}}.\arg\operatorname{th}\frac{\operatorname{sen} 7.x}{\sqrt{5}} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2-(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\arg\operatorname{th}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ u(x) = \operatorname{sen} 7.x \Rightarrow u'(x) = 7.\cos 7.x \end{cases}$
* Multiplicamos y dividimos por 7 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.31}$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}.(5-x)} = 2.\int \frac{dx}{2.\sqrt{x}.(5-x)} = 2.\frac{1}{\sqrt{5}}.\text{arg th}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}} + C$$

∗ Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2-(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\text{arg th}\frac{u(x)}{a} + C$

∗ En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ (u(x))^2 = x \Rightarrow u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{x}} \end{cases}$

∗ Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.32}$ $$\int \frac{dx}{9-5.x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.\int \frac{\sqrt{5}}{9-5.x^2}.dx = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1}{3}.\text{arg th}\frac{\sqrt{5}.x}{3} + C$$

∗ Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2-(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\text{arg th}\frac{u(x)}{a} + C$

∗ En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ (u(x))^2 = 5.x^2 \Rightarrow u(x) = \sqrt{5}.x \Rightarrow u'(x) = \sqrt{5} \end{cases}$

∗ Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{5}$ para que sea inmediata

$\boxed{1.5.33}$ $$\int \frac{2.\text{sen}\,x.\cos x}{9-\text{sen}^4 x}.dx = \frac{1}{3}.\text{arg th}\frac{\text{sen}^2 x}{3} + C$$

∗ Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2-(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\text{arg th}\frac{u(x)}{a} + C$

∗ En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ u(x) = \text{sen}^2 x \Rightarrow u'(x) = 2.\text{sen}\,x.\cos x \end{cases}$

$\boxed{1.5.34}$ $$\int \frac{4.x^{1/3}}{3.(25-x^{8/3})}.dx = \frac{1}{5}.\text{arg th}\frac{x^{4/3}}{5} + C$$

∗ Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2-(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\text{arg th}\frac{u(x)}{a} + C$

∗ En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \\ (u(x))^2 = x^{8/3} \Rightarrow u(x) = x^{4/3} \Rightarrow u'(x) = \frac{4}{3}.x^{1/3} \end{cases}$

$\boxed{1.5.35}$ $$\int \frac{x}{\sqrt{x^4+9}}.dx = \frac{1}{2}.\int \frac{2.x}{\sqrt{x^4+9}}.dx = \frac{1}{2}.\text{arg sh}\frac{x^2}{3} + C$$

∗ Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2+a^2}}.dx = \text{arg sh}\frac{u(x)}{a} + C$

∗ En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ (u(x))^2 = x^4 \Rightarrow u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2.x \end{cases}$

∗ Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

1.5.36 $$\int \frac{3.x^2}{\sqrt{x^6+7}}.dx = \arg sh\frac{x^3}{\sqrt{7}} + C$$

$*$ Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2+a^2}}.dx = \arg sh\frac{u(x)}{a} + C$

$*$ En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7} \\ (u(x))^2 = x^6 \Rightarrow u(x) = x^3 \Rightarrow u'(x) = 3.x^2 \end{cases}$

1.5.37 $$\int \frac{e^{3.x}}{\sqrt{e^{6.x}+4}}.dx = \frac{1}{3}.\int \frac{3.e^{3.x}}{\sqrt{e^{6.x}+4}}.dx = \frac{1}{3}.\arg sh\frac{e^{3.x}}{2} + C$$

$*$ Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2+a^2}}.dx = \arg sh\frac{u(x)}{a} + C$

$*$ En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ (u(x))^2 = e^{6.x} \Rightarrow u(x) = e^{3.x} \Rightarrow u'(x) = 3.e^{3.x} \end{cases}$

$*$ Multiplicamos y dividimos por 3 para que sea inmediata

1.5.38 $$\int \frac{\cos x}{\sqrt{(sen^2 7.x)+5}}.dx = \frac{1}{7}.\int \frac{7.\cos x}{\sqrt{(sen^2 7.x)+5}}.dx = \frac{1}{7}.\arg sh\frac{sen\, 7.x}{\sqrt{5}} + C$$

$*$ Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2+a^2}}.dx = \arg sh\frac{u(x)}{a} + C$

$*$ En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ (u(x))^2 = sen^2 7.x \Rightarrow u(x) = sen 7.x \Rightarrow u'(x) = 7.\cos 7.x \end{cases}$

$*$ Multiplicamos y dividimos por 7 para que sea inmediata

1.5.39 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{x+5}} = 2.\int \frac{dx}{2.\sqrt{x}.\sqrt{x+5}} = 2.\arg sh\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}} + C$$

$*$ Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2+a^2}}.dx = \arg sh\frac{u(x)}{a} + C$

$*$ En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ (u(x))^2 = x \Rightarrow u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{x}} \end{cases}$

$*$ Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

1.5.40 $$\int \frac{dx}{\sqrt{5.x^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5.x^2+9}}.dx = \frac{1}{\sqrt{5}}.\arg sh\frac{\sqrt{5}.x}{3} + C$$

$*$ Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2+a^2}}.dx = \arg sh\frac{u(x)}{a} + C$

$*$ En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ (u(x))^2 = 5.x^2 \Rightarrow u(x) = \sqrt{5}.x \Rightarrow u'(x) = \sqrt{5} \end{cases}$

$*$ Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{5}$ para que sea inmediata

1.5.41 $$\int \frac{dx}{x.\sqrt{(\mathrm{Ln}\ x)^2+9}} = \arg \mathrm{sh}\frac{\mathrm{Ln}\ x}{3} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2+a^2}}.dx = \arg \mathrm{sh}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ (u(x))^2 = (\mathrm{Ln}\,x)^2 \Rightarrow u(x) = \mathrm{Ln}\ x \Rightarrow u'(x) = 1/x \end{cases}$

1.5.42 $$\int \frac{4.x^{1/3}}{3.\sqrt{x^{8/3}+4}}.dx = \arg \mathrm{sh}\frac{x^{4/3}}{2} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2+a^2}}.dx = \arg \mathrm{sh}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ (u(x))^2 = x^{8/3} \Rightarrow u(x) = x^{4/3} \Rightarrow u'(x) = \frac{4}{3}.x^{1/3} \end{cases}$

1.5.43 $$\int \frac{x}{\sqrt{x^4-9}}.dx = \frac{1}{2}.\int \frac{2.x}{\sqrt{x^4-9}}.dx = \frac{1}{2}.\arg \mathrm{ch}\frac{x^2}{3} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2-a^2}}.dx = \arg \mathrm{ch}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ (u(x))^2 = x^4 \Rightarrow u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2.x \end{cases}$
* Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

1.5.44 $$\int \frac{3.x^2}{\sqrt{x^6-7}}.dx = \arg \mathrm{ch}\frac{x^3}{\sqrt{7}} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2-a^2}}.dx = \arg \mathrm{ch}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7} \\ (u(x))^2 = x^6 \Rightarrow u(x) = x^3 \Rightarrow u'(x) = 3.x^2 \end{cases}$

1.5.45 $$\int \frac{e^{3.x}}{\sqrt{e^{6.x}-4}}.dx = \frac{1}{3}.\int \frac{3.e^{3.x}}{\sqrt{e^{6.x}-4}}.dx = \frac{1}{3}.\arg \mathrm{ch}\frac{e^{3.x}}{2} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2-a^2}}.dx = \arg \mathrm{ch}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ (u(x))^2 = e^{6.x} \Rightarrow u(x) = e^{3.x} \Rightarrow u'(x) = 3.e^{3.x} \end{cases}$
* Multiplicamos y dividimos por 3 para que sea inmediata

1.5.46 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{(\text{sen}^2 7.x)-5}}.dx = \frac{1}{7}.\int \frac{7.\cos x}{\sqrt{(\text{sen}^2 7.x)-5}}.dx = \frac{1}{7}.\text{arg ch}\frac{\text{sen } 7.x}{\sqrt{5}} + C$

* Tipo: $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2 - a^2}}.dx = \text{arg ch}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ (u(x))^2 = \text{sen}^2 7.x \Rightarrow u(x) = \text{sen} 7.x \Rightarrow u'(x) = 7.\cos 7.x \end{cases}$
* Multiplicamos y dividimos por 7 para que sea inmediata

1.5.47 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{x-5}} = 2.\int \frac{dx}{2.\sqrt{x}.\sqrt{x-5}} = 2.\text{arg ch}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}} + C$

* Tipo: $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2 - a^2}}.dx = \text{arg ch}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ (u(x))^2 = x \Rightarrow u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{2.\sqrt{x}} \end{cases}$
* Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

1.5.48 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5.x^2 - 9}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5.x^2 - 9}}.dx = \frac{1}{\sqrt{5}}.\text{arg ch}\frac{\sqrt{5}.x}{3} + C$

* Tipo: $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2 - a^2}}.dx = \text{arg ch}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ (u(x))^2 = 5.x^2 \Rightarrow u(x) = \sqrt{5}.x \Rightarrow u'(x) = \sqrt{5} \end{cases}$
* Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{5}$ para que sea inmediata

1.5.49 $\displaystyle\int \frac{dx}{x.\sqrt{(\text{Ln } x)^2 - 9}} = \text{arg ch}\frac{\text{Ln } x}{3} + C$

* Tipo: $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2 - a^2}}.dx = \text{arg ch}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ (u(x))^2 = (\text{Ln} x)^2 \Rightarrow u(x) = \text{Ln } x \Rightarrow u'(x) = 1/x \end{cases}$

1.5.50 $\displaystyle\int \frac{4.x^{1/3}}{3.\sqrt{x^{8/3} - 4}}.dx = \text{arg ch}\frac{x^{4/3}}{2} + C$

* Tipo: $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2 - a^2}}.dx = \text{arg ch}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ (u(x))^2 = x^{8/3} \Rightarrow u(x) = x^{4/3} \Rightarrow u'(x) = \dfrac{4}{3}.x^{1/3} \end{cases}$

$\boxed{1.5.51}$ $$\int \text{ch } x.\text{sh}^7x.dx = \frac{1}{7+1}.\text{sh}^{7+1}x + C = \frac{\text{sh}^8x}{8} + C$$

$* \text{ Tipo: } \int (u(x))^m.dx = \frac{1}{m+1}.(u(x))^{m+1} + C,\ m \neq -1$

$* \text{ En nuestro caso es } \begin{cases} u(x) = \text{sh } x \Rightarrow u'(x) = \text{ch } x \\ m = 7 \end{cases}$

$\boxed{1.5.52}$ $$\int \frac{\text{sh } x}{\text{ch}^7x}.dx = \int \text{sh } x.\text{ch}^{-7}x.dx = \frac{1}{-7+1}.\text{ch}^{-7+1}x + C = -\frac{\text{ch}^{-6}x}{6} + C$$

$* \text{ Tipo: } \int (u(x))^m.dx = \frac{1}{m+1}.(u(x))^{m+1} + C,\ m \neq -1$

$* \text{ En nuestro caso es } \begin{cases} u(x) = \text{ch } x \Rightarrow u'(x) = \text{sh } x \\ m = -7 \end{cases}$

$\boxed{1.5.53}$ $$\int \frac{\text{sh } 2.x}{\sqrt[5]{1+\text{ch } 2.x}}.dx = \frac{1}{2}.\int \frac{\text{sh } 2.x}{\sqrt[5]{1+\text{ch } 2.x}}.dx = \frac{1}{2}.\frac{(1+\text{ch}2.x)^{(-1/5)+1}}{(-1/5)+1} + C$$

$* \text{ Tipo: } \int (u(x))^m.dx = \frac{1}{m+1}.(u(x))^{m+1} + C,\ m \neq -1$

$* \text{ En nuestro caso es } \begin{cases} u(x) = \text{ch}2.x \Rightarrow u'(x) = 2.\text{sh } 2.x \\ m = -1/5 \end{cases}$

$*$ Multiplicamos y dividimos por 2 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.54}$ $$\int \frac{\text{ch } x}{7+\text{sh } x}.dx = \text{Ln}\left|7+\text{sh } x\right| + C$$

$* \text{ Tipo: } \int \frac{u'(x)}{u(x)}.dx = \text{Ln}\left|u(x)\right| + C$

$* \text{ En nuestro caso es } u(x) = 7+\text{sh}\,x \Rightarrow u'(x) = \text{ch } x$

$\boxed{1.5.55}$ $$\int \frac{e^{\text{sh } x}.\text{ch } x}{1+e^{\text{sh } x}}.dx = \text{Ln}\left|1+e^{\text{sh } x}\right| + C$$

$* \text{ Tipo: } \int \frac{u'(x)}{u(x)}.dx = \text{Ln}\left|u(x)\right| + C$

$* \text{ En nuestro caso es } u(x) = 1+e^{\text{sh } x} \Rightarrow u'(x) = e^{\text{sh } x}.\text{ch } x$

$*$ Multiplicamos y dividimos por $-5$ para que sea inmediata

$\boxed{1.5.56}$ $$\int \text{cth } x.dx = \int \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}.dx = \text{Ln}\left|\text{sh } x\right| + C$$

$* \text{ Tipo: } \int \frac{u'(x)}{u(x)}.dx = \text{Ln}\left|u(x)\right| + C$

$* \text{ En nuestro caso es } u(x) = \text{sh } x \Rightarrow u'(x) = \text{ch } x$

$\boxed{1.5.57}$

$$\int \text{th } x.dx = \int \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}.dx = \text{Ln}|\text{ch } x| + C$$

$$* \text{ Tipo: } \int \frac{u'(x)}{u(x)}.dx = \text{Ln }|u(x)| + C$$

$$* \text{ En nuestro caso es } u(x) = \text{ch } x \Rightarrow u'(x) = \text{sh } x$$

$\boxed{1.5.58}$

$$\int \frac{3.dx}{(5 + \text{th } 3.x).\text{ch}^2\ 3.x}.dx = \text{Ln}|5 + \text{th } 3.x| + C$$

$$* \text{ Tipo: } \int \frac{u'(x)}{u(x)}.dx = \text{Ln }|u(x)| + C$$

$$* \text{ En nuestro caso es } u(x) = 5 + \text{th } 3.x \Rightarrow u'(x) = 3/\text{ch}^2\ 3.x$$

$\boxed{1.5.59}$

$$\int 4^{\text{sh } x}.\text{ch } x.dx = \frac{4^{\text{sh } x}}{\text{Ln } 4} + C$$

$$* \text{ Tipo: } \int u'(x).a^{u(x)}.dx = \frac{a^{u(x)}}{\text{Ln } a} + C,\ a > 0$$

$$* \text{ En nuestro caso es } \begin{cases} u(x) = \text{sh } x \Rightarrow u'(x) = \text{ch } x \\ a = 4 \end{cases}$$

$\boxed{1.5.60}$

$$\int \frac{3^{\text{arg sh } x}}{\sqrt{1 + x^2}}.dx = \frac{3^{\text{arg sh } x}}{\text{Ln } 3} + C$$

$$* \text{ Tipo: } \int u'(x).a^{u(x)}.dx = \frac{a^{u(x)}}{\text{Ln } a} + C,\ a > 0$$

$$* \text{ En nuestro caso es } \begin{cases} u(x) = \text{arg sh } x \Rightarrow u'(x) = 1/\sqrt{1 + x^2} \\ a = 3 \end{cases}$$

$\boxed{1.5.61}$

$$\int \frac{3^{\text{arg th } x}}{1 - x^2}.dx = \frac{3^{\text{arg th } x}}{\text{Ln } 3} + C$$

$$* \text{ Tipo: } \int u'(x).a^{u(x)}.dx = \frac{a^{u(x)}}{\text{Ln } a} + C,\ a > 0$$

$$* \text{ En nuestro caso es } \begin{cases} u(x) = \text{arg th } x \Rightarrow u'(x) = 1/(1 - x^2) \\ a = 3 \end{cases}$$

$\boxed{1.5.62}$

$$\int \text{ch } x.\text{sen }(1 + \text{sh } x).dx = -\cos(1 + \text{sh } x) + C$$

$$* \text{ Tipo: } \int u'(x).\text{sen } u(x).dx = -\cos u(x) + C$$

$$* \text{ En nuestro caso es } u(x) = 1 + \text{sh } x \Rightarrow u'(x) = \text{ch } x$$

$\boxed{1.5.63}$

$$\int \text{ch } x.\cos(1 + \text{sh } x).dx = \text{sen }(1 + \text{sh } x) + C$$

$$* \text{ Tipo: } \int u'(x).\cos u(x).dx = \text{sen } u(x) + C$$

$$* \text{ En nuestro caso es } u(x) = 1 + \text{sh } x \Rightarrow u'(x) = \text{ch } x$$

$\boxed{1.5.64}$ $$\int \frac{\text{sh } x}{\cos^2 \text{ ch } x}.dx = \text{tg ch } x + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx/\cos^2 u(x) = \text{tg } u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = \text{ch } x \Rightarrow u'(x) = \text{sh } x$

$\boxed{1.5.65}$ $$\int \frac{x^4.\text{sh } x^5}{\text{sen}^2 \text{ ch } x^5}.dx = \frac{1}{5}.\int \frac{5.x^4.\text{sh } x^5}{\text{sen}^2 \text{ ch } x^5}.dx = -\frac{1}{5}.\text{ctg ch } x^5 + C$$

* Tipo: $\int u'(x).dx/\text{sen}^2 u(x) = -\text{ctg } u(x) + C$
* En nuestro caso es $u(x) = \text{ch } x^5 \Rightarrow u'(x) = 5.x^4.\text{sh } x^5$
* Multiplicamos y dividimos por 5 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.66}$ $$\int \frac{x^2.\text{ch } x}{7+\text{sh}^2 x^3}.dx = \frac{1}{3}.\int \frac{3.x^2.\text{ch } x}{7+\text{sh}^2 x^3}.dx = \frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt{7}}.\text{arc tg}\frac{\text{sh } x^3}{\sqrt{7}} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2+(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\text{arc tg}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7} \\ u(x) = \text{sh } x^3 \Rightarrow u'(x) = 3.x^2.\text{ch } x^3 \end{cases}$
* Multiplicamos y dividimos por 3 para que sea inmediata

$\boxed{1.5.67}$ $$\int \frac{3.x^2}{(7+\text{th}^2 x^3).\text{ch}^2 x^3}.dx = \frac{1}{\sqrt{7}}.\text{arc tg}\frac{\text{th } x^3}{\sqrt{7}} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2+(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\text{arc tg}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7} \\ u(x) = \text{th } x^3 \Rightarrow u'(x) = 3.x^2/\text{ch}^2 x^3 \end{cases}$

$\boxed{1.5.68}$ $$\int \frac{-3.x^2}{(7+\text{cth}^2 x^3).\text{sh}^2 x^3}.dx = \frac{1}{\sqrt{7}}.\text{arc tg}\frac{\text{cth } x^3}{\sqrt{7}} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{a^2+(u(x))^2}.dx = \frac{1}{a}.\text{arc tg}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7} \\ u(x) = \text{cth } x^3 \Rightarrow u'(x) = -3.x^2/\text{sh}^2 x^3 \end{cases}$

$\boxed{1.5.69}$ $$\int \frac{dx}{\sqrt{9-\text{th}^2 x}.\text{ch}^2 x} = \text{arc sen}\frac{\text{th } x}{3} + C$$

* Tipo: $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2-(u(x))^2}}.dx = \text{arc sen}\frac{u(x)}{a} + C$
* En nuestro caso es $\begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \\ u(x) = \text{th } x \Rightarrow u'(x) = 1/\text{ch}^2 x \end{cases}$