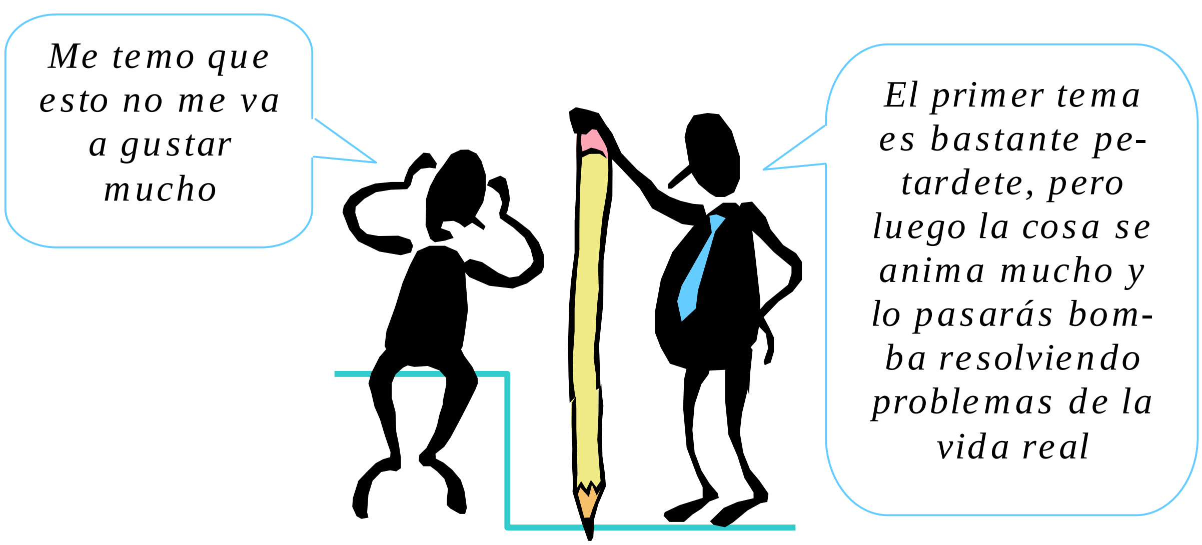
Tema 1

Cálculo de primitivas



1.9 PRIMITIVAS DE FUNCIONES RACIONALES DEL SENO Y EL COSENO

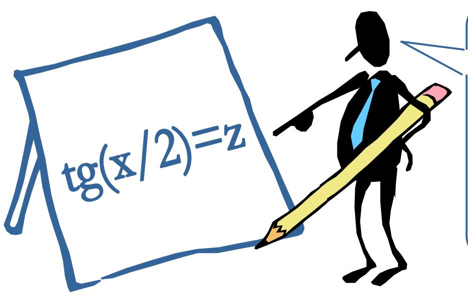
Nos planteamos el cálculo de la primitiva de una función racional del seno y el coseno, es decir, una función en la que "sen x" y "cos x" aparecen como aparece la "x" en los cocientes de polinomios; o sea, como funciones como las siguientes:

$$f(x) = \frac{1 + \mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}^5 x . \cos^7 x}{\mathrm{sen}\ x + 3.\cos x} \ ; \ g(x) = \frac{\cos^3 x + \mathrm{sen}^4 x}{1 - \mathrm{sen}\ x}$$

Para denotar genéricamente este tipo de funciones escribiremos $R(\mathrm{sen}\ x ; \cos x)$.

Caso general

El problema de calcular la primitiva de una función $R(\mathrm{sen}\ x ; \cos x)$ siempre puede transformarse en el problema de calcular la primitiva de un cociente de polinomios haciendo el cambio de variable $\mathrm{tg}\ (x/2) = z$.



Cada vez que hagas el cambio $\mathrm{tg}\ (x/2) = z$ deberás sustituir $\mathrm{sen}\ x$, $\cos x$ y dx por sus correspondientes valores en función de "z"; por tanto, debes saber que si $\mathrm{tg}\ (x/2) = z$, es:

$$\mathrm{sen}\ x = \frac{2.z}{1+z^2} \ ; \ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \ ; \ dx = \frac{2.dz}{1+z^2}$$

FONEMATO 1.9.1

$$\int \frac{1}{1-\mathrm{sen}\ x}.dx = \int \frac{1}{1 - \frac{2.z}{1+z^2}} . \frac{2.dz}{1+z^2} = 2.\int \frac{dz}{z^2 - 2.z + 1} =$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\ (x/2) = z \Rightarrow \mathrm{sen}\ x = \frac{2.z}{1+z^2} \ \text{ y } \ dx = \frac{2.dz}{1+z^2}}$$

$$= 2.\int \frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{2}{1-z} = -\frac{2}{1-\mathrm{tg}\ (x/2)} + C$$

$$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable: } z = \mathrm{tg}\ (x/2)}$$

FONEMATO 1.9.2

$$\int \frac{1}{3-\cos x}.dx = \int \frac{1}{3 - \frac{1-z^2}{1+z^2}} . \frac{2.dz}{1+z^2} = \int \frac{dz}{1+2.z^2} =$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\ (x/2) = z \Rightarrow \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \ \text{ y } \ dx = \frac{2.dz}{1+z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\mathrm{arc\ tg}\ \sqrt{2}.z = \frac{1}{\sqrt{2}}.\mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{2}.\mathrm{tg}\ (x/2)) + C$$

$$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable: } z = \mathrm{tg}\ (x/2)}$$

FONEMATO 1.9.3

$$\int \frac{\text{sen } x}{1+\text{sen } x+\cos x}.dx = \int \frac{\frac{2.z}{1+z^2}}{1+\frac{2.z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}.\frac{2.dz}{1+z^2} = \int \frac{2.z}{(1+z).(1+z^2)}.dz =$$

$$\text{tg } (x/2) = z \Rightarrow \text{sen } x = \frac{2.z}{1+z^2}, \ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \ \text{ y } \ dx = \frac{2.dz}{1+z^2}$$

$$= -\int \frac{1}{1+z}.dz + \int \frac{z}{1+z^2}.dz + \int \frac{1}{1+z^2}.dz =$$

- La descomposición en suma de fracciones simples es:

$$\frac{2.z}{(1+z).(1+z^2)} = \frac{A}{1+z} + \frac{M.z+N}{1+z^2} \quad \text{(I)}$$

- Para calcular las constantes, reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I) e igualamos los numeradores; resulta:

$$2.z = A.(1+z^2) + (M.x+N).(1+z) \quad \text{(II)}$$

- Al hacer $z = 0$ en (II): $-2 = 2.A \Rightarrow A = -1$
- Para calcular "M" y "N" asignamos a "x" dos valores cualesquiera en (II) y resolvemos el sistema de ecuaciones que resulta (teniendo en cuenta que es $A = -1$):

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ si } z = 0 \Rightarrow 0 = -1 + N \\ * \text{ si } z = 1 \Rightarrow 2 = -2.+2.M + 2.N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ N = 1 \end{cases}$$

$$= -\text{Ln}\,|1+z| + \frac{1}{2}.\text{Ln}\,|1+z^2| + \text{arc tg } z =$$

$$= -\text{Ln}\left|1+\text{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right| + \text{arc tg } (\text{tg } \frac{x}{2}) + C =$$

deshacemos el cambio de variable realizado: $z = \text{tg } (x/2)$

$$= -\text{Ln}\left|1+\text{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right| + \frac{x}{2} + C$$

FONEMATO 1.9.4

$$\int \frac{\cos x}{1+\text{sen } x+\cos x}.dx = \int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{1+\frac{2.z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}.\frac{2.dz}{1+z^2} = \int \frac{1-z^2}{(1+z).(1+z^2)}.dz =$$

$$\text{tg } (x/2) = z \Rightarrow \text{sen } x = \frac{2.z}{1+z^2}, \ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \ \text{ y } \ dx = \frac{2.dz}{1+z^2}$$

$$= \int \frac{1-z}{1+z^2}.dz = \int \frac{1}{1+z^2}.dz - \int \frac{z}{1+z^2}.dz =$$

$$= \text{arc tg } z - \frac{1}{2}.\text{Ln}\,|1+z^2| = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right| + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \text{tg } (x/2)$

FONEMATO 1.9.5

$$\int \frac{1-\text{sen } x}{(1+\text{sen } x).\text{sen } x}.dx = \int \frac{1-\dfrac{2.z}{1+z^2}}{\left(1+\dfrac{2.z}{1+z^2}\right).\dfrac{2.z}{1+z^2}}.\frac{2.dz}{1+z^2} = \int \frac{z^2-2.z+1}{z.(z^2+2.z+1)}.dz =$$

$$\boxed{\text{tg }(x/2)=z \Rightarrow \text{sen } x = \frac{2.z}{1+z^2},\ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}\ \text{ y }\ dx = \frac{2.dz}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{z^2-2.z+1}{z.(z+1)^2}.dz = \int \frac{dz}{z} - 4\int \frac{dz}{(z+1)^2} =$$

- La descomposición en suma de fracciones simples es:

$$\frac{z^2-2.z+1}{z.(z+1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{C}{z+1} \quad \text{(I)}$$

- Para calcular las constantes, reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I) e igualamos los numeradores; resulta:

$$z^2-2.z+1 = A.(z+1)^2 + B.z + C.z.(z+1) \quad \text{(II)}$$

- Al hacer $z=0$ en (II): $1 = A+0+0 \Rightarrow A=1$
- Al hacer $z=-1$ en (II): $4 = 0-B+0 \Rightarrow B=-4$
- Al derivar los dos miembros de (II), resulta:

$$2.z-2 = 2.A.(z+1)+B+C.(2.z+1) \quad \text{(III)}$$

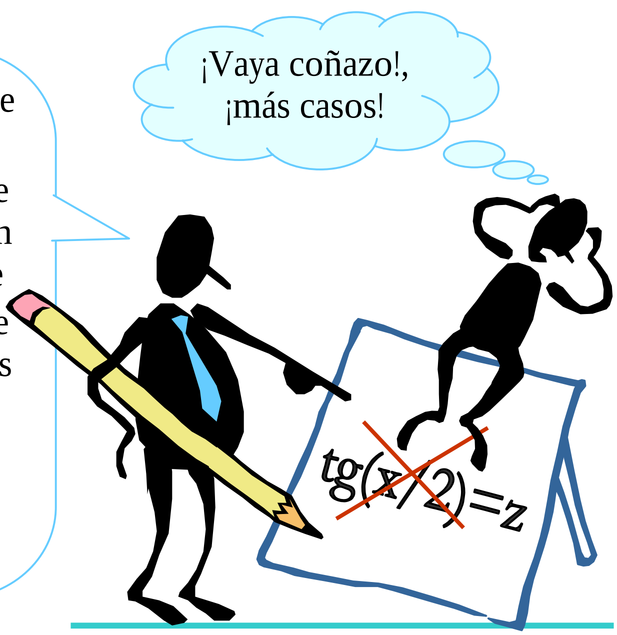
- Al hacer $z=-1$ en (III), teniendo en cuenta que $A=1$ y $B=-4$, es:

$$-4 = 0-4+C.(-2+1) \Rightarrow C=0$$

$$= \text{Ln}\,|z| + \frac{4}{z+1} = \text{Ln}\,|\text{tg }(x/2)| + \frac{4}{1+\text{tg }(x/2)} + C$$

$$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable: } z = \text{tg }(x/2)}$$

Hemos dicho que con el cambio de variable $\text{tg }(x/2)=z$ siempre podemos transformar el problema de calcular la primitiva de una función $R(\text{sen } x;\cos x)$ en el problema de calcular la primitiva de un cociente de polinomios; no obstante, vamos a estudiar otros cambios de variable que, en ciertos casos, son más eficaces (menos petardos) que el cambio $\text{tg }(x/2)=z$



Casos particulares

1

Para calcular la primitiva $\int R(\operatorname{sen} x).\cos x.dx$ haremos $\operatorname{sen} x = z$; así:

$$\int R(\operatorname{sen} x).\cos x.dx = \int R(z).dz$$

$\boxed{\operatorname{sen} x = z \Rightarrow \cos x.dx = dz}$

✓ $$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen}^2 x}.\cos x.dx = \int \frac{z}{1+z^2}.dz = \frac{1}{2}.\operatorname{Ln}\left|1+z^2\right| = \frac{1}{2}.\operatorname{Ln}\left|1+\operatorname{sen}^2 x\right| + C$$

$\boxed{\operatorname{sen} x = z \Rightarrow \cos x.dx = dz}$ $\boxed{\text{deshacemos el cambio: } z = \operatorname{sen} x}$

✓ $$\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}.\cos x.dx = \int \frac{1-z}{z+z^2}.dz = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z+1}\right).dz =$$

$\boxed{\operatorname{sen} x = z \Rightarrow \cos x.dx = dz}$

La descomposición en suma de fracciones simples es:

$$\frac{1-z}{z+z^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} \Rightarrow 1-z = A.(z+1) + B.z$$

$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow 1 = A + 0 \Rightarrow A = 1$$

$$\text{Si } z = -1 \Rightarrow 2 = 0 - B \Rightarrow B = -2$$

$$= \operatorname{Ln}|z| - 2.\operatorname{Ln}|z+1| = \operatorname{Ln}|\operatorname{sen} x| - 2.\operatorname{Ln}|1+\operatorname{sen} x| + C$$

$\boxed{\text{deshacemos el cambio: } z = \operatorname{sen} x}$

✓ $$\int \frac{\cos^3 x}{2-\operatorname{sen} x}.dx = \int \frac{\cos^2 x}{2-\operatorname{sen} x}.\cos x.dx = \int \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{2-\operatorname{sen} x}.\cos x.dx =$$

$\boxed{\operatorname{sen} x = z \Rightarrow \cos x.dx = dz}$

$$= \int \frac{1-z^2}{2-z}.dz = \int \left(z+2-\frac{3}{2-z}\right).dz = \frac{1}{2}.z^2 + 2.z + 3.\operatorname{Ln}|2-z| =$$

$$\begin{array}{r|l} -z^2+1 & -z+2 \\ \hline \underline{z^2-2.z} & z+2 \\ -2.z+1 & \\ \underline{2.z-4} & \\ -3 & \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}.\operatorname{sen}^2 x + 2.\operatorname{sen} x + 3.\operatorname{Ln}|2-\operatorname{sen} x| + C$$

$\boxed{\text{deshacemos el cambio realizado: } z = \operatorname{sen} x}$

2

Para calcular la primitiva $\int R(\cos x).\text{sen } x.dx$ haremos $\cos x = z$; así:

$$\int R(\cos x).\text{sen } x.dx = -\int R(z).dz$$

$\boxed{\cos x = z \Rightarrow \text{sen } x.dx = -dz}$

✓ $$\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}.\text{sen } x.dx = \int \frac{-z}{1+z^2}.dz = -\frac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+z^2\right| = -\frac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+\cos^2 x\right| + C$$

$\boxed{\cos x = z \Rightarrow \text{sen } x.dx = -dz}$ $\boxed{\text{deshacemos el cambio: } z = \cos x}$

✓ $$\int \frac{1-\cos x}{\cos x + \cos^2 x}.\text{sen } x.dx = -\int \frac{1-z}{z+z^2}.dz = -\int \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z+1}\right).dz =$$

$\boxed{\text{sen } x = z \Rightarrow \cos x.dx = dz}$

La descomposición en suma de fracciones simples es:

$$\frac{1-z}{z+z^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} \Rightarrow 1-z = A.(z+1) + B.z$$

$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow 1 = A + 0 \Rightarrow A = 1$$
$$\text{Si } z = -1 \Rightarrow 2 = 0 - B \Rightarrow B = -2$$

$$= -\text{Ln}\left|z\right| + 2.\text{Ln}\left|z+1\right| = -\text{Ln}\left|\cos x\right| + 2.\text{Ln}\left|1+\cos x\right| + C$$

$\boxed{\text{deshacemos el cambio: } z = \cos x}$

✓ $$\int \frac{\text{sen}^3 x}{3-\cos x}.dx = \int \frac{\text{sen}^2 x}{3-\cos x}.\text{sen } x.dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{3-\cos x}.\text{sen } x.dx =$$

$\boxed{\cos x = z \Rightarrow \text{sen } x.dx = -dz}$

$$= \int \frac{z^2-1}{3-z}.dz = \int \left(-z-3+\frac{8}{3-z}\right).dz =$$

$$\begin{array}{r|l} z^2 - 1 & -z+3 \\ \hline \underline{-z^2 + 3.z} & -z-3 \\ 3.z - 1 & \\ \underline{-3.z + 9} & \\ 8 & \end{array}$$

$$= -\frac{1}{2}.z^2 - 3.z - 8.\text{Ln}\left|3-z\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}.\cos^2 x - 3.\cos x - 8.\text{Ln}\left|3-\cos x\right| + C$$

$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable realizado: } z = \cos x}$

3

Para calcular la primitiva $\int R(\text{tg } x).dx$ haremos $\text{tg } x = z$; así:

$$\int R(\text{tg } x).dx = \int R(z).\frac{dz}{1+z^2}$$

$\text{tg } x = z \Rightarrow x = \text{arc tg } z \Rightarrow dx = dz/(1+z^2)$

✓ $$\int \frac{1}{1+\text{tg } x}.dx = \int \frac{1}{1+z}.\frac{dz}{1+z^2} =$$

$\text{tg } x = z \Rightarrow x = \text{arc tg } z \Rightarrow dx = dz/(1+z^2)$

$$= \frac{1}{2}.\int \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1-z}{1+z^2}\right).dz = \frac{1}{2}.\int \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{1+z^2} - \frac{z}{1+z^2}\right).dz =$$

La descomposición en suma de fracciones simples es:

$$\frac{1}{(1+z).(1+z^2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{M.x+N}{1+z^2} \Rightarrow 1 = A.(1+z^2) + (M.x+N).(z+1) \quad (I)$$

Si $z = -1 \Rightarrow 1 = 2.A + 0 \Rightarrow A = 1/2$, y para calcular "M" y "N" damos a "x" dos valores cualesquiera en (I) y resolvemos el sistema de dos ecuaciones que se obtiene (teniendo en cuenta que $A = 1/2$):

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ si } z = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + N \\ * \text{ si } z = 1 \Rightarrow 1 = 1 + 2.M + 2.N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} M = -1/2 \\ N = 1/2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}.\text{Ln}\left|z+1\right| + \frac{1}{2}.\text{arc tg } z - \frac{1}{4}.\text{Ln}\left|1+z^2\right| =$$

$$= \frac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+\text{tg } x\right| + \frac{1}{2}.\text{arc tg }(\text{tg } x) - \frac{1}{4}.\text{Ln}\left|1+\text{tg}^2 x\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+\text{tg } x\right| + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.\text{Ln}\left|1+\text{tg}^2 x\right| + C$$

✓ $$\int \frac{2.\text{tg } x}{1+\text{tg } x}.dx = \int \frac{2.z}{1+z}.\frac{dz}{1+z^2} =$$

$\text{tg } x = z \Rightarrow x = \text{arc tg } z \Rightarrow dx = dz/(1+z^2)$

$$= \int \left(-\frac{1}{z+1} + \frac{1+z}{1+z^2}\right).dz = \int \left(-\frac{1}{z+1} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{z}{1+z^2}\right).dz =$$

La descomposición en suma de fracciones simples es:

$$\frac{2.z}{(1+z).(1+z^2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{M.x+N}{1+z^2} \Rightarrow 2.z = A.(1+z^2) + (M.x+N).(z+1) \quad (I)$$

Si $z = -1 \Rightarrow -2 = 2.A + 0 \Rightarrow A = -1$, y para calcular "M" y "N" damos a "x" dos valores cualesquiera en (I) y resolvemos el sistema de dos ecuaciones que se obtiene (teniendo en cuenta que $A = -1$):

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ si } z = 0 \Rightarrow 0 = -1 + N \\ * \text{ si } z = 1 \Rightarrow 2 = -2 + 2.M + 2.N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ N = 1 \end{cases}$$

$$= -\text{Ln}\,|z+1| + \text{arc tg } z + \frac{1}{2}.\text{Ln}\,|1+z^2| =$$

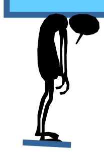
deshacemos el cambio de variable realizado: $z = \text{tg } x$

$$= -\text{Ln}\,|1+\text{tg } x| + \text{arc tg }(\text{tg } x) + \frac{1}{2}.\text{Ln}\,|1+\text{tg}^2 x| + C =$$

$$= -\text{Ln}\,|1+\text{tg } x| + x + \frac{1}{2}.\text{Ln}\,|1+\text{tg}^2 x| + C$$

teniendo en cuenta que es: $\text{arc tg }(\text{tg } x) = x$

4



Para calcular una primitiva de la forma $\int R(\text{sen}^{2.m} x\ ;\ \cos^{2.n} x).dx$, donde "m" y "n" son números enteros ($\Rightarrow$ sen x y cos x aparecen elevados a exponentes pares), haremos $\text{tg } x = z$; en este trance, para poder sustituir $\text{sen}^2 x$, $\cos^2 x$ y "dx" por sus correspondientes valores en función de "z", deberás saber que si $\text{tg } x = z$, es:

$$\text{sen}^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}\ ;\ \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}\ ;\ dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

✓ $$\int \frac{dx}{4.\text{sen}^2 x + 9.\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{4.\frac{z^2}{1+z^2} + 9.\frac{1}{1+z^2}} =$$

$$\text{tg } x = z \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = \dfrac{z^2}{1+z^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+z^2} \\ dx = \dfrac{dz}{1+z^2} \end{cases}$$

$$= \int \frac{dz}{4.z^2+9} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\text{arc tg}\left(\frac{2.z}{3}\right) = \frac{1}{6}.\text{arc tg}\left(\frac{2.\text{tg } x}{3}\right) + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \text{tg } x$

✓ $$\int \frac{dx}{1+\text{sen}^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{1+2.z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\int \frac{\sqrt{2}.dz}{1+(\sqrt{2}.z)^2} =$$

$\text{tg } x = z \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{z^2}{1+z^2}$ y $dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\text{arc tg }(\sqrt{2}.z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\text{arc tg }(\sqrt{2}.\text{tg } x) + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \text{tg } x$

5

Podemos distinguir 3 casos a la hora de calcular la primitiva de una función $R(\text{sen}\ x; \cos x)$ cuya expresión matemática es de la forma $R(\text{sen}\ x; \cos x) = \text{sen}^m x.\cos^n x$, siendo "m" y "n" números enteros:

A) Si alguno de los exponentes (por ejemplo, el "m") es impar, lo expresaremos como suma de un número par y del número 1 (o sea, $m = 2.k + 1$, siendo "k" entero); así:

$$\int \text{sen}^{2.k+1} x.\cos^n x.dx = \int \text{sen}^{2.k} x.\cos^n x.\text{sen}\ x.dx =$$
$$= \int (1 - \cos^2 x)^k.\cos^n x.\text{sen}\ x.dx = \int R(\cos x).\text{sen}\ x.dx$$

B) Si los dos exponentes son pares pero alguno es negativo, haremos el cambio $\text{tg}\ x = z$; como sabemos, en tal caso, es:

$$\text{sen}^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}\ ;\ \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}\ ;\ dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

C) Si los dos exponentes son pares no negativos (≥ 0), por ejemplo $m = 2.p$ y $n = 2.q$ siendo "p" y "q" números naturales, es:

$$\int \text{sen}^{2.p} x.\cos^{2.q} x.dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2.x}{2}\right)^p.\left(\frac{1 + \cos 2.x}{2}\right)^q.dx$$

$$\boxed{\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2.x}{2}\ ;\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2.x}{2}}$$

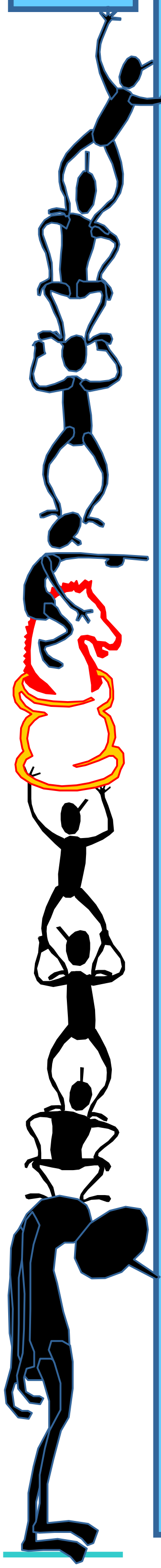
Al efectuar el producto $(1 - \cos 2.x)^p.(1 + \cos 2.x)^q$ obtendremos una suma de potencias pares e impares de $\cos 2.x$; las primitivas de las potencias impares de $\cos 2.x$ se calculan como se indica en A), y para las primitivas de las potencias pares de $\cos 2.x$ basta tener en cuenta que $\cos^2 2.x = (1 + \cos 4.x)/2$, así:

$$\int \cos^{2.r} 2.x.dx = \int \left(\frac{1 + \cos 4.x}{2}\right)^r.dx$$

Al efectuar el desarrollo de $(1 + \cos 4.x)^r$ obtendremos una suma de potencias pares e impares de $\cos 4.x$; las primitivas de las potencias impares de $\cos 4.x$ se calculan como se indica en A), y las primitivas de las potencias pares de $\cos 4.x$ se calculan teniendo en cuenta que $\cos^2 4.x = (1 + \cos 8.x)/2$, así:

$$\int \cos^{2.s} 4.x.dx = \int \left(\frac{1 + \cos 8.x}{2}\right)^s.dx$$

Al efectuar el desarrollo de $(1 + \cos 8.x)^s$ obtendremos una suma de potencias pares e impares de $\cos 8.x$; las primitivas de las ...



✓ $$\int \operatorname{sen}^5 x.\cos^2 x.dx = \int \operatorname{sen}^4 x.\cos^2 x.\operatorname{sen} x.dx =$$

Caso 5A, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x.dx$ en la que algún exponente es impar. Expresamos dicho exponente impar como suma de un numero par y del número 1 $(5 = 4 + 1)$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2.\cos^2 x.\operatorname{sen} x.dx =$$

$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

primitiva de la forma $\int R(\cos x).\operatorname{sen} x.dx \Rightarrow \cos x = z \Rightarrow \operatorname{sen} x.dx = -dz$

$$= -\int (1-z^2)^2.z^2.dz = -\int (z^2 - 2.z^4 + z^6).dz =$$

$$= -\frac{1}{3}.z^3 + \frac{2}{5}.z^5 - \frac{1}{7}.z^7 = -\frac{1}{3}.\cos^3 x + \frac{2}{5}.\cos^5 x - \frac{1}{7}.\cos^7 x + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \cos x$

✓ $$\int \operatorname{sen}^2 x.\cos^5 x.dx = \int \operatorname{sen}^2 x.\cos^4 x.\cos x.dx =$$

Caso 5A, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x.dx$ en la que algún exponente es impar. Expresamos dicho exponente impar como suma de un numero par y del número 1 $(5 = 4 + 1)$

$$= \int \operatorname{sen}^2 x.(1-\operatorname{sen}^2 x)^2.\cos x.dx =$$

$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

primitiva de la forma $\int R(\operatorname{sen} x).\cos x.dx \Rightarrow \operatorname{sen} x = z \Rightarrow \cos x.dx = dz$

$$= \int z^2.(1-z^2)^2.dz = \int (z^2 - 2.z^4 + z^6).dz =$$

$$= \frac{1}{3}.z^3 - \frac{2}{5}.z^5 + \frac{1}{7}.z^7 = \frac{1}{3}.\operatorname{sen}^3 x - \frac{2}{5}.\operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{7}.\operatorname{sen}^7 x + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \operatorname{sen} x$

✓ $$\int \cos^7 x.dx = \int \cos^6 x.\cos x.dx =$$

Caso 5A, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x.dx$ en la que algún exponente es impar. Expresamos dicho exponente impar como suma de un numero par y del número 1 $(7 = 6 + 1)$

$$= \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^3.\cos x.dx =$$

$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

primitiva de la forma $\int R(\operatorname{sen} x).\cos x.dx \Rightarrow \operatorname{sen} x = z \Rightarrow \cos x.dx = dz$

$$= \int (1-z^2)^3.dz = \int (1-3.z^2+3.z^4-z^6).dz =$$

$$= z - z^3 + \frac{3}{5}.z^5 - \frac{1}{7}.z^7 = \text{sen } x - \text{sen}^3 x + \frac{3}{5}.\text{sen}^5 x - \frac{1}{7}.\text{sen}^7 x + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \text{sen } x$

✓ $$\int \frac{\cos^2 x}{\text{sen } x}.dx = \int \text{sen}^{-1} x.\cos^2 x.dx = \int \frac{\cos^2 x.}{\text{sen}^2 x}.\text{sen } x.dx =$$

Caso 5A, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int \text{sen}^m x.\cos^n x.dx$ en la que algún exponente es impar. Expresamos dicho exponente impar como suma de un numero par y del número 1 $(-1 = -2 + 1)$

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= \int \frac{\cos^2 x.}{1-\cos^2 x}.\text{sen } x.dx = -\int \frac{z^2}{1-z^2}.dz = ...$$

primitiva de la forma $\int R(\cos x).\text{sen } x.dx \Rightarrow \cos x = z \Rightarrow \text{sen } x.dx = -dz$

✓ $$\int \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}.dx = \int \text{sen}^2 x.\cos^{-2} x.dx =$$

Caso 5B, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int \text{sen}^m x.\cos^n x.dx$ en la que ambos exponentes son pares, pero alguno es negativo $\Rightarrow$ hacemos el cambio tg $x = z$, y entonces:

$$\text{sen}^2 x = \frac{z^2}{1+z^2} \; ; \; \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2} \; ; \; dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \int \frac{z^2}{1+z^2}.\left(\frac{1}{1+z^2}\right)^{-1}.\frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{z^2}{1+z^2}.dz =$$

dividimos los polinomios

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right).dz = z - \text{arc tg } z = \text{tg } x - \text{arc tg } (\text{tg } x) + C = (\text{tg } x) - x + C =$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \text{tg } x$

✓ $$\int \text{sen}^2 x.\cos^2 x.dx = \int \frac{1-\cos 2.x}{2}.\frac{1+\cos 2.x}{2}.dx =$$

Caso 5C, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int \text{sen}^m x.\cos^n x.dx$ en la que ambos exponentes son pares no negativos $\Rightarrow$ damos "entrada" al ángulo "2.x": es $\text{sen}^2 x = (1-\cos 2.x)/2$ y $\cos^2 x = (1+\cos 2.x)/2$

$$= \frac{1}{4}.\int (1-\cos^2 2.x).dx = \frac{1}{4}.x - \frac{1}{4}.\int \cos^2 2.x.dx =$$

$$= \frac{1}{4}.x - \frac{1}{4}.\int \frac{1+\cos 4.x}{2}dx = \frac{1}{4}.x - \frac{1}{4}.\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8}.\text{sen } 4.x\right) + C$$

damos "entrada" al ángulo "4.x": $\cos^2 2.x = (1+\cos 4.x)/2$

✓ $$\int \operatorname{sen}^6 x.dx = \int \frac{1}{8}.(1-\cos 2.x)^3.dx =$$

Caso 5C, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x.dx$ en la que ambos exponentes son pares no negativos $\Rightarrow$ damos "entrada" al ángulo "2.x": es $\operatorname{sen}^2 x = (1-\cos 2.x)/2$

$$= \frac{1}{8}.\int (1-3.\cos 2.x + 3.\cos^2 2.x - \cos^3 2.x).dx = ...$$

• Es: $\int 1.dx = x$

• Es: $\int \cos 2.x.dx = \frac{1}{2}.\operatorname{sen} 2.x$

• Es: $\int \cos^2 2.x.dx = \int \frac{1+\cos 4.x}{2}.dx = \frac{1}{2}.(x + \frac{1}{4}.\operatorname{sen} 4.x)$

Caso 5C, damos "entrada" al ángulo "4.x": $\cos^2 2.x = \frac{1+\cos 4.x}{2}$

• Es: $\int \cos^3 2.x.dx = \int \cos^2 2.x.\cos 2.x.dx =$

Caso 5A, expresamos el exponente impar como suma de un número par y del número 1 $(3 = 2+1)$

como todo el mundo sabe, es: $\cos^2 2.x = 1 - \operatorname{sen}^2 2.x$

$$= \int (1-\operatorname{sen}^2 2.x).\cos 2.x.dx =$$

Primitiva de la forma $\int R(\operatorname{sen} 2.x).\cos 2.x.dx \Rightarrow$ hacemos el cambio; $\operatorname{sen} 2.x = z \Rightarrow \cos 2.x.dx = dz/2$

$$= \frac{1}{2}.\int (1-z^2).dz = \frac{1}{2}.z - \frac{1}{6}.z^3 = \frac{1}{2}.\operatorname{sen} 2.x - \frac{1}{6}.\operatorname{sen}^3 2.x$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \operatorname{sen} 2.x$

✓ $$\int \cos^8 x.dx = \int \frac{1}{16}.(1+\cos 2.x)^4.dx =$$

Caso 5C, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x.dx$ en la que ambos exponentes son pares no negativos $\Rightarrow$ damos "entrada" al ángulo "2.x": es $\cos^2 x = (1+\cos 2.x)/2$

$$= \frac{1}{16} . \int (1 + 4.\cos 2.x + 6.\cos^2 2.x + 4.\cos^3 2.x + \cos^4 2.x).dx =$$

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4.a^3.b + 6.a^2.b^2 + 4.a.b^3 + b^4}$$

$$= \frac{1}{16}.(I_1 + 4.I_2 + 6.I_3 + 4.I_4 + I_5) + C = ...$$

$$\bullet \text{ Es: } I_1 = \int 1.dx = x$$

$$\bullet \text{ Es: } I_2 = \int \cos 2.x.dx = \frac{1}{2}.\text{sen } 2.x$$

$$\bullet \text{ Es: } I_3 = \int \cos^2 2.x.dx = \frac{1}{2}.(x + \frac{1}{4}.\text{sen } 4.x)$$

ver ejercicico anterior

$$\bullet \text{ Es: } I_4 = \int \cos^3 2.x.dx = \frac{1}{2}.\text{sen } 2.x - \frac{1}{6}.\text{sen}^3 2.x$$

$$\bullet \text{ Es: } I_5 = \int \cos^4 2.x.dx = \int (\frac{1 + \cos 4.x}{2})^2.dx =$$

$$= \frac{1}{4}.\int (1 + 2.\cos 4.x + \cos^2 4.x).dx =$$

$$= \frac{1}{4}.x + \frac{1}{8}.\text{sen } 4.x + \frac{1}{4}.\int \cos^2 4.x.dx =$$

Caso 5C, damos "entrada" al ángulo "8.x": $\cos^2 4.x = \dfrac{1 + \cos 8.x}{2}$

$$= \frac{1}{4}.x + \frac{1}{8}.\text{sen } 4.x + \frac{1}{4}.\int \frac{1 + \cos 8.x}{2}.dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{8}.\text{sen } 4.x + \frac{1}{4}.(\frac{x}{2} + \frac{1}{16}.\text{sen } 8.x)$$

6

Para calcular primitivas de la forma:

$$\text{A) } \int \text{sen } ax.\cos bx.dx, \ a \neq b$$

$$\text{B) } \int \text{sen } ax.\text{sen } bx.dx, \ a \neq b$$

$$\text{C) } \int \cos ax.\cos bx.dx, \ a \neq b$$

basta recordar las fórmulas

$$\text{A) sen } ax.\cos bx = \frac{\text{sen } (a-b).x + \text{sen } (a+b).x}{2}, \ a \neq b$$

$$\text{B) sen } ax.\text{sen } bx = \frac{\cos (a-b).x - \cos (a+b).x}{2}, \ a \neq b$$

$$\text{C) } \cos ax.\cos bx = \frac{\cos (a-b).x + \cos (a+b).x}{2}, \ a \neq b$$

Con ellas transformaremos el problema de calcular la primitiva de un producto en el problema de calcular la primitiva de una suma.

✓ $$\int \text{sen } 4x.\cos 2x.dx = \frac{1}{2}.\int (\text{sen } 2x + \text{sen } 6x).dx =$$

$$\boxed{\text{sen } 4x.\cos 2x = \frac{\text{sen } (4-2).x + \text{sen } (4+2).x}{2} = \frac{\text{sen } 2x + \text{sen } 6x}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}.\cos 2x - \frac{1}{12}.\cos 6x + C$$

✓ $$\int \text{sen } 2x.\cos 6x.dx = \frac{1}{2}.\int (\text{sen } 8x - \text{sen } 4x).dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen } 2x.\cos 6x = \dfrac{\text{sen } (2-6).x + \text{sen } (2+6).x}{2} = \dfrac{\text{sen } (-4x) + \text{sen } 8x}{2} = \\ \qquad = \dfrac{\text{sen } 8x - \text{sen } 4x}{2}, \text{ pues sen } (-4x) = -\text{sen } 4.x \end{array}}$$

$$= -\frac{1}{16}.\cos 8x + \frac{1}{8}.\cos 4x + C$$

✓ $$\int \text{sen } 4x.\text{sen } 2x.dx = \frac{1}{2}.\int (\cos 2x - \cos 6x).dx =$$

$$\boxed{\text{sen } 4x.\text{sen } 2x = \frac{\cos (4-2).x - \cos (4+2).x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 6x}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}.\text{sen } 2x - \frac{1}{12}.\text{sen } 6x + C$$

✓ $$\int \text{sen } 2x.\text{sen } 6x.dx = \frac{1}{2}.\int (\cos 4x - \cos 8x).dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen } 2x.\text{sen } 6x = \dfrac{\cos (2-6).x - \cos (2+6).x}{2} = \dfrac{\cos (-4x) - \cos 8x}{2} = \\ \qquad = \dfrac{\cos 4x - \cos 8x}{2}, \text{ pues } \cos (-4x) = \cos 4.x \end{array}}$$

$$= \frac{1}{8}.\text{sen } 4x - \frac{1}{16}.\text{sen } 8x + C$$

✓ $$\int \cos 4x.\cos 2x.dx = \frac{1}{2}.\int (\cos 2x + \cos 6x).dx =$$

$$\boxed{\cos 4x.\cos 2x = \frac{\cos (4-2).x + \cos (4+2).x}{2} = \frac{\cos 2x + \cos 6x}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}.\text{sen } 2x + \frac{1}{12}.\text{sen } 6x + C$$

✓ $$\int \cos 2x.\cos 6x.dx = \frac{1}{2}.\int (\cos 4x + \cos 8x).dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 2x.\cos 6x = \dfrac{\cos (2-6).x + \cos (2+6).x}{2} = \dfrac{\cos (-4x) + \cos 8x}{2} = \\ \qquad = \dfrac{\cos 4x + \cos 8x}{2}, \text{ pues } \cos (-4x) = \cos 4.x \end{array}}$$

$$= \frac{1}{8}.\text{sen } 4x + \frac{1}{16}.\text{sen } 8x + C$$