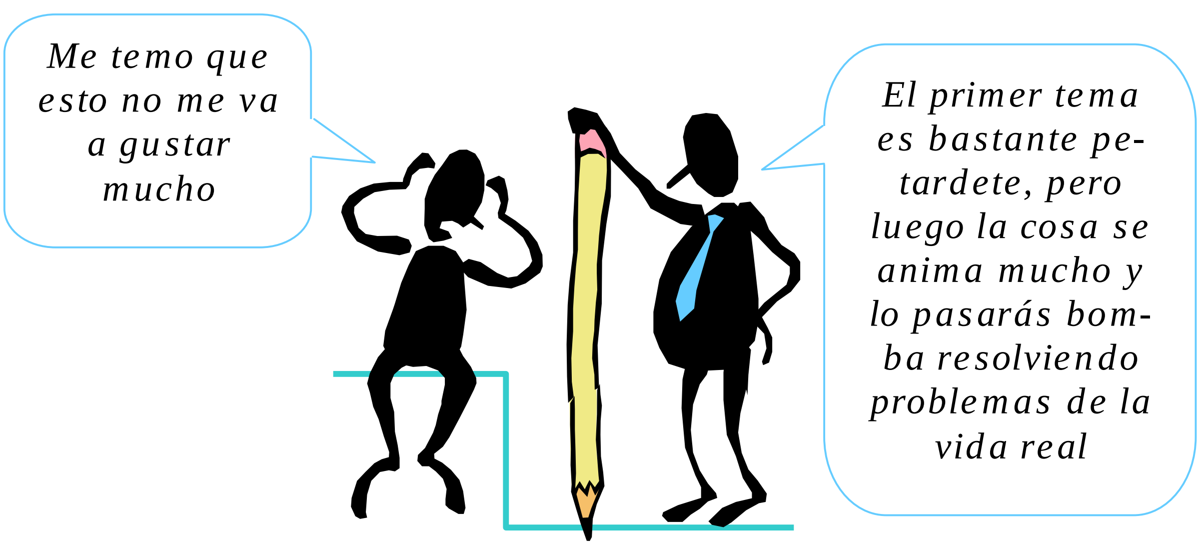
Tema 1

Cálculo de primitivas



1.10 PRIMITIVAS DE FUNCIONES RACIONALES DE SH Y CH

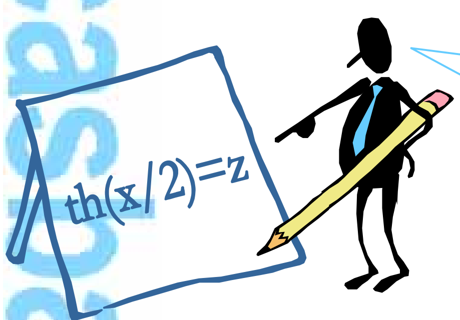
Nos planteamos el cálculo de la primitiva de una función racional del seno hiperbólico y el coseno hiperbólico, es decir, de una función en la que "$\text{sh}\ x$" y "$\text{ch}\ x$" aparecen como aparece la "x" en los cocientes de polinomios; o sea, funciones como las siguientes:

$$f(x)=\frac{1+\text{sh}^2 x+\text{sh}^5 x.\text{ch}^7 x}{\text{sh}\ x+3.\text{ch}\ x}\ ;\ g(x)=\frac{\text{ch}^3 x+\text{sh}^4 x}{1-\text{sh}\ x}$$

Para denotar genéricamente este tipo de funciones escribiremos $R(\text{sh}\ x;\text{ch}\ x)$.

Caso general

El problema de calcular la primitiva de una función $R(\text{sh}\ x;\text{ch}\ x)$ siempre puede transformarse en el problema de calcular la primitiva de un cociente de polinomios haciendo el cambio de variable $\text{th}\,(x/2)=z$.



Cada vez que hagas el cambio $\text{th}\,(x/2)=z$ tendrás que sustituir $\text{sh}\ x$, $\text{ch}\ x$ y dx por sus correspondientes valores en función de "z"; por tanto, debes saber que si $\text{th}\,(x/2)=z$, es:

$$\text{sh}\ x=\frac{2.z}{1-z^2}\ ;\ \text{ch}\ x=\frac{1+z^2}{1-z^2}\ ;\ dx=\frac{2.dz}{1-z^2}$$

Como ya eres un artista calculando primitivas de cocientes de polinomios, en los ejemplos sólo nos ocuparemos del tránsito que conduce de una primitiva de la forma $\int R(\text{sh}\ x;\text{ch}\ x).dx$ a la primitiva de un cociente de polinomios.

✓ $$\int\frac{1}{1+\text{sh}\ x+\text{ch}\ x}.dx=\int\frac{1}{1+\frac{2.z}{1-z^2}+\frac{1+z^2}{1-z^2}}.\frac{2.dz}{1-z^2}=$$

$$\boxed{\text{th}\,(x/2)=z\Rightarrow \text{sh}\ x=\frac{2.z}{1-z^2},\ \text{ch}\ x=\frac{1+z^2}{1-z^2}\ \text{y}\ dx=\frac{2.dz}{1-z^2}}$$

$$=\int\frac{1}{1+z}.dz=\text{Ln}\,|1+z|=\text{Ln}\left|1+\text{th}\,\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable: } z=\text{th}\,(x/2)}$$

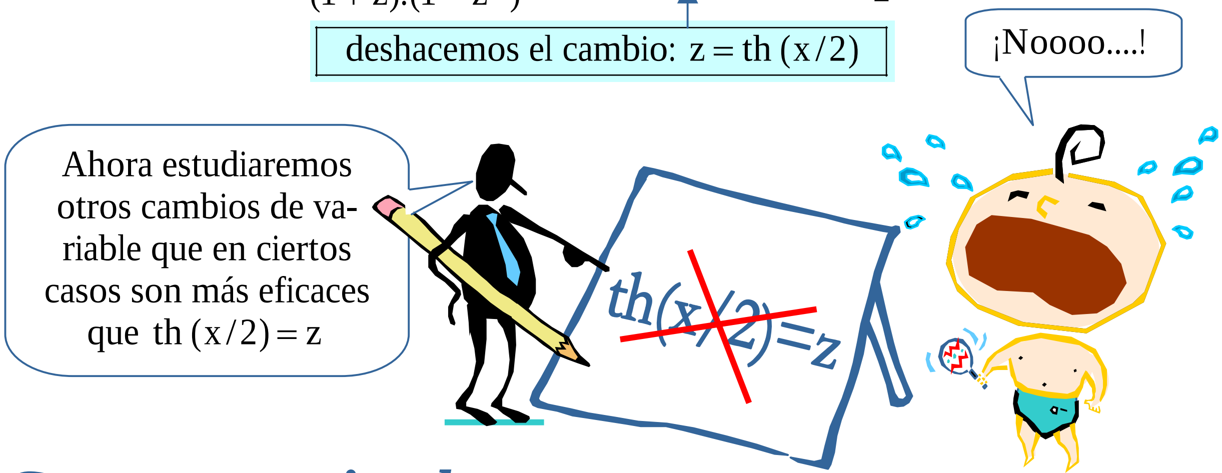
✓ $$\int\frac{\text{sh}\ x}{1+\text{sh}\ x+\text{ch}\ x}.dx=\int\frac{\frac{2.z}{1-z^2}}{1+\frac{2.z}{1-z^2}+\frac{1+z^2}{1-z^2}}.\frac{2.dz}{1-z^2}=$$

$$\boxed{\text{th}\,(x/2)=z\Rightarrow \text{sh}\ x=\frac{2.z}{1-z^2},\ \text{ch}\ x=\frac{1+z^2}{1-z^2}\ \text{y}\ dx=\frac{2.dz}{1-z^2}}$$

calculamos la primitiva del cociente de polinomios

$$= \int \frac{2.z}{(1+z).(1-z^2)}.dz = \;..... \; = g(z) = g(\text{th}\,\frac{x}{2}) + C$$

deshacemos el cambio: $z = \text{th}\,(x/2)$



Casos particulares

1

Para calcular la primitiva $\int R(\text{sh}\,x).\text{ch}\,x.dx$ haremos $\text{sh}\,x = z$; así:

$$\int R(\text{sh}\,x).\text{ch}\,x.dx = \int R(z).dz$$

$\text{sh}\,x = z \Rightarrow \text{ch}\,x.dx = dz$

✓ $$\int \frac{\text{sh}\,x}{1+\text{sh}^2 x}.\text{ch}\,x.dx = \int \frac{z}{1+z^2}.dz = \frac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+z^2\right| = \frac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+\text{sh}^2 x\right| + C$$

$\text{sh}\,x = z \Rightarrow \text{ch}\,x.dx = dz$ | deshacemos el cambio: $z = \text{sh}\,x$

✓ $$\int \frac{\text{ch}^3 x}{2-\text{sh}\,x}.dx = \int \frac{\text{ch}^2 x}{2-\text{sh}\,x}.\text{ch}\,x.dx = \int \frac{1+\text{sh}^2 x}{2-\text{sh}\,x}.\text{ch}\,x.dx =$$

es $\text{ch}^2 x = 1 + \text{sh}^2 x$

$\text{sh}\,x = z \Rightarrow \text{ch}\,x.dx = dz$

$$= \int \frac{1+z^2}{2-z}.dz = \;....\; = g(z) = g(\text{sh}\,x) + C$$

deshacemos el cambio: $z = \text{sh}\,x$

✓ $$\int \frac{1}{\text{th}\,x.(2-\text{sh}\,x)}.dx = \int \frac{\text{ch}\,x}{\text{sh}\,x.(2-\text{sh}\,x)}.dx = \int \frac{dz}{z.(2-z)} =$$

$\text{th}\,x = \text{sh}\,x \,/\, \text{ch}\,x$ | $\text{sh}\,x = z \Rightarrow \text{ch}\,x.dx = dz$

$$= \;....\; = g(z) = g(\text{sh}\,x) + C$$

deshacemos el cambio: $z = \text{sh}\,x$

2

Para calcular la primitiva $\int R(\text{ch } x).\text{sh } x.dx$ haremos $\text{ch } x = z$; así:

$$\int R(\text{ch } x).\text{sh } x.dx = \int R(z).dz$$

$\boxed{\text{ch } x = z \Rightarrow \text{sh } x.dx = dz}$

✓ $\int \dfrac{\text{ch } x}{1+\text{ch}^2 x}.\text{sh } x.dx = \int \dfrac{z}{1+z^2}.dz = \dfrac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+z^2\right| = \dfrac{1}{2}.\text{Ln}\left|1+\text{ch}^2 x\right| + C$

$\boxed{\text{ch } x = z \Rightarrow \text{sh } x.dx = dz}$ $\boxed{\text{deshacemos el cambio: } z = \text{ch } x}$

✓ $\int \dfrac{\text{sh}^3 x}{3-\text{ch } x}.dx = \int \dfrac{\text{sh}^2 x}{3-\text{ch } x}.\text{sh } x.dx = \int \dfrac{-1+\text{ch}^2 x}{3-\text{ch } x}.\text{sh } x.dx =$

$\boxed{\text{siempre es } \text{sh}^2 x = -1+\text{ch}^2 x}$

$\boxed{\text{ch } x = z \Rightarrow \text{sh } x.dx = dz}$

$= \int \dfrac{z^2-1}{3-z}.dz = \; .... \; = g(z) = g(\text{ch } x) + C$

$\boxed{\text{deshacemos el cambio: } z = \text{ch } x}$

✓ $\int \dfrac{\text{th } x}{2-\text{ch } x}.dx = \int \dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x.(2-\text{sh } x)}.dx = \int \dfrac{dz}{z.(2-z)} =$

$\boxed{\text{th } x = \text{sh } x/\text{ch } x}$ $\boxed{\text{ch } x = z \Rightarrow \text{sh } x.dx = dz}$

$= \; .... \; = g(z) = g(\text{ch } x) + C$

$\boxed{\text{deshacemos el cambio: } z = \text{ch } x}$

3

Para calcular la primitiva $\int R(\text{th } x).dx$ haremos $\text{th } x = z$; así:

$$\int R(\text{th } x).dx = \int R(z).\frac{dz}{1-z^2}$$

$\boxed{\text{th } x = z \Rightarrow x = \text{arc th } z \Rightarrow dx = dz/(1-z^2)}$

✓ $\int \dfrac{1}{1+\text{th } x}.dx = \int \dfrac{1}{1+z}.\dfrac{dz}{1-z^2} = \; .... \; = g(z) = g(\text{th } x) + C$

$\boxed{\text{th } x = z \Rightarrow dx = dz/(1-z^2)}$

$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable: } z = \text{th } x}$

✓ $$\int \frac{2.\text{th } x}{1+\text{th } x}.dx = \int \frac{2.z}{1+z}.\frac{dz}{1-z^2} = \ \dots\ = p(z) = g(\text{th } x) + C$$

$\text{th } x = z \Rightarrow dx = dz/(1-z^2)$

deshacemos el cambio de variable: $z = \text{th } x$

4 Para calcular una primitiva de la forma $\int R(\text{sh}^{2.m} x\ ;\ \text{ch}^{2.n} x).dx$, donde "m" y "n" son números enteros ($\Rightarrow$ sh x y ch x aparecen elevados a exponentes pares), haremos $\text{th } x = z$; en este trance, para poder sustituir $\text{sh}^2 x$, $\text{ch}^2 x$ y "dx" por sus correspondientes valores en función de "z", deberás saber que si $\text{th } x = z$, es:

$$\text{sh}^2 x = \frac{z^2}{1-z^2}\ ;\ \text{ch}^2 x = \frac{1}{1-z^2}\ ;\ dx = \frac{dz}{1-z^2}$$

✓ $$\int \frac{dx}{4.\text{sh}^2 x + 9.\text{ch}^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1-z^2}}{4.\frac{z^2}{1-z^2} + 9.\frac{1}{1-z^2}} =$$

$\text{th } x = z \Rightarrow \text{sh}^2 x = \frac{z^2}{1-z^2},\ \text{ch}^2 x = \frac{1}{1-z^2}$ y $dx = \frac{dz}{1-z^2}$

$$= \int \frac{dz}{4.z^2+9} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\text{arc tg}\left(\frac{2.z}{3}\right) = \frac{1}{6}.\text{arc tg}\left(\frac{2.\text{th } x}{3}\right) + C$$

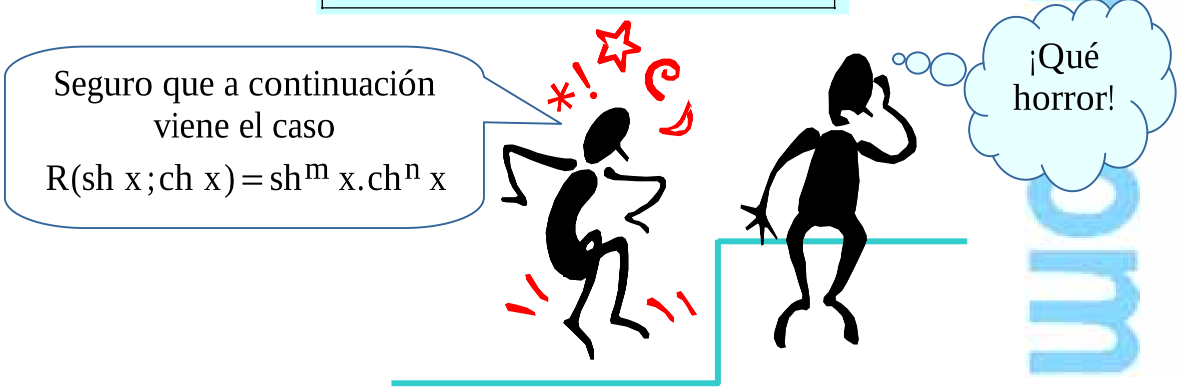
deshacemos el cambio: $z = \text{th } x$

✓ $$\int \frac{dx}{1-\text{sh}^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1-z^2}}{1-\frac{z^2}{1-z^2}} = \int \frac{dz}{1-2.z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\int \frac{\sqrt{2}.dz}{1-(\sqrt{2}.z)^2} =$$

$\text{th } x = z \Rightarrow \text{sh}^2 x = \frac{z^2}{1-z^2}$ y $dx = \frac{dz}{1-z^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\text{arh th}\,(\sqrt{2}.z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\text{arg th}\,(\sqrt{2}.\text{th } x) + C$$

deshacemos el cambio: $z = \text{th } x$



5

Podemos distinguir 3 casos a la hora de calcular la primitiva de una función $R(\text{sh } x; \text{ch } x)$ cuya expresión matemática es de la forma $R(\text{sh } x; \text{ch } x) = \text{sh}^m x.\text{ch}^n x$, siendo "m" y "n" números enteros:

A) Si alguno de los exponentes (por ejemplo, el "n") es impar, lo expresaremos como suma de un número par y del número 1 (o sea, $n = 2.k + 1$, siendo "k" entero); así:

$$\int \text{sh}^m x.\text{ch}^{2.k+1} x.dx = \int \text{sh}^m x.\text{ch}^{2.k} x.\text{ch } x.dx =$$
$$= \int \text{sh}^m x.(1 + \text{sh}^2 x)^k.\text{ch } x.dx = \int R(\text{sh } x).\text{ch } x.dx$$

B) Si los dos exponentes son pares pero alguno es negativo, haremos el cambio $\text{th } x = z$; como ya sabemos, en tal caso, es:

$$\text{sh}^2 x = \frac{z^2}{1 - z^2} \;;\; \text{ch}^2 x = \frac{1}{1 - z^2} \;;\; dx = \frac{dz}{1 - z^2}$$

C) Si los dos exponentes son pares no negativos (≥ 0), por ejemplo $m = 2.p$ y $n = 2.q$ siendo "p" y "q" números naturales, es:

$$\int \text{sh}^{2.p} x.\text{ch}^{2.q} x.dx = \int \left(\frac{-1 + \text{ch } 2.x}{2}\right)^p.\left(\frac{1 + \text{ch } 2.x}{2}\right)^q.dx$$

$$\boxed{\text{sh}^2 x = \frac{-1 + \text{ch } 2.x}{2} \;;\; \text{ch}^2 x = \frac{1 + \text{ch } 2.x}{2}}$$

Al efectuar el producto $(-1 + \text{ch } 2.x)^p.(1 + \text{ch } 2.x)^q$ obtendremos una suma de potencias pares e impares de $\text{ch } 2.x$; las primitivas de las potencias impares de $\text{ch } 2.x$ se calculan como se indica en A), y con las primitivas de las potencias pares de $\text{ch } 2.x$ basta tener en cuenta que $\text{ch}^2 2.x = (1 + \text{ch } 4.x)/2$, así:

$$\int \text{ch}^{2.r} 2.x.dx = \int \left(\frac{1 + \text{ch } 4.x}{2}\right)^r.dx$$

Al efectuar el desarrollo de $(1 + \text{ch } 4.x)^r$ obtendremos una suma de potencias pares e impares de $\text{ch } 4.x$; las primitivas de las potencias impares de $\text{ch } 4.x$ se calculan como se indica en el caso A), y las primitivas de las potencias pares de $\text{ch } 4.x$ se calculan teniendo en cuenta que $\text{ch}^2 4.x = (1 + \text{ch } 8.x)/2$, así:

$$\int \text{ch}^{2.s} 4.x.dx = \int \left(\frac{1 + \text{ch } 8.x}{2}\right)^s.dx$$

Al efectuar el desarrollo de $(1 + \text{ch } 8.x)^s$ obtendremos una suma de potencias pares e impares de $\text{ch } 8.x$; las primitivas de las .....

✓ $\int sh^5 x.ch^2 x.dx = \int sh^4 x.ch^2 x.sh\, x.dx =$

Caso 5A, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int sh^m x.ch^n x.dx$ en la que algún exponente es impar. Expresamos dicho exponente impar como suma de un numero par y del número 1 $(5 = 4 + 1)$

$= \int (-1 + ch^2 x)^2.ch^2 x.sh\, x.dx =$

$sh^2 x = -1 + ch^2 x$

primitiva de la forma $\int R(ch\, x).sh\, x.dx \Rightarrow ch\, x = z \Rightarrow sh\, x.dx = dz$

$= \int (-1 + z^2)^2.z^2.dz = \;....\; = g(z) = g(ch\, x) + C$

deshacemos el cambio de variable: $z = ch\, x$

✓ $\int sh^2 x.ch^5 x.dx = \int sh^2 x.ch^4 x.ch\, x.dx =$

Caso 5A, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int sh^m x.ch^n x.dx$ en la que algún exponente es impar. Expresamos dicho exponente impar como suma de un numero par y del número 1 $(5 = 4 + 1)$

$= \int sh^2 x.(1 + sh^2 x)^2.ch\, x.dx =$

$ch^2 x = 1 + sh^2 x$

primitiva de la forma $\int R(sh\, x).ch\, x.dx \Rightarrow sh\, x = z \Rightarrow ch\, x.dx = dz$

$= \int z^2.(1 + z^2)^2.dz = \;....\; = g(z) = g(sh\, x) + C$

deshacemos el cambio de variable: $z = sen\, x$

✓ $\int sech\, x.dx = \int \frac{dx}{sh\, x} = \int sh^{-1} x.dx = \int \frac{sh\, x.}{sh^2 x}.dx =$

Caso 5A, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int sh^m x.ch^n x.dx$ en la que algún exponente es impar. Expresamos dicho exponente impar como suma de un numero par y del número 1 $(-1 = -2 + 1)$

$sh^2 x = -1 + ch^2 x$

$= \int \frac{1}{-1 + ch^2 x}.sh\, x.dx = \int \frac{1}{-1 + z^2}.dz = ...$

primitiva de la forma $\int R(ch\, x).sh\, x.dx \Rightarrow ch\, x = z \Rightarrow sh\, x.dx = dz$

$= \;....\; = g(z) = g(ch\, x) + C$

deshacemos el cambio de variable: $z = ch\, x$

✓ $$\int \frac{sh^2 x}{ch^2 x}.dx = \int sh^2 x.ch^{-2} x.dx =$$

Caso 5B, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int sh^m x.ch^n x.dx$ en la que ambos exponentes son pares, pero alguno es negativo $\Rightarrow$ hacemos el cambio th x = z; así:

$$sh^2 x = \frac{z^2}{1-z^2} \ ; \ ch^2 x = \frac{1}{1-z^2} \ ; \ dx = \frac{dz}{1-z^2}$$

$$= \int \frac{z^2}{1-z^2}.(\frac{1}{1-z^2})^{-1}.\frac{dz}{1-z^2} = \int \frac{z^2}{1+z^2}.dz =$$

$$= \ .... \ = g(z) = g(th\ x) + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = th\ x$

✓ $$\int sh^2 x.ch^2 x.dx = \int \frac{-1+ch\ 2.x}{2}.\frac{1+ch\ 2.x}{2}.dx =$$

Caso 5C, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int sh^m x.ch^n x.dx$ en la que ambos exponentes son pares no negativos $\Rightarrow$ damos "entrada" al argumento "2.x": es $sh^2 x = (-1+ch\ 2.x)/2$ y $ch^2 x = (1+ch\ 2.x)/2$

$$= \frac{1}{4}.\int (-1+ch^2\ 2.x).dx = -\frac{1}{4}.x + \frac{1}{4}.\int ch^2\ 2.x.dx =$$

$$= -\frac{1}{4}.x + \frac{1}{4}.\int \frac{1+ch\ 4.x}{2}dx = -\frac{1}{4}.x + \frac{1}{4}.(\frac{x}{2} + \frac{1}{8}.sh\ 4.x) + C$$

damos "entrada" al argumento "4.x": $ch^2\ 2.x = (1+ch\ 4.x)/2$

✓ $$\int sh^6 x.dx = \int (\frac{-1+ch\ 2.x}{2})^3.dx =$$

Caso 5C, pues estamos ante una primitiva de la forma $\int sh^m x.ch^n x.dx$ en la que ambos exponentes son pares no negativos $\Rightarrow$ damos "entrada" al argumento "2.x": es $sh^2 x = (-1+ch\ 2.x)/2$

$$= \frac{1}{8}.\int (-1+3.ch\ 2.x - 3.ch^2\ 2.x + ch^3\ 2.x).dx = ...$$

- Es: $\int ch^2\ 2.x.dx = (\text{caso 5C}) = \int \frac{1+ch\ 4.x}{2}.dx = \frac{1}{2}.(x + \frac{1}{4}.sh\ 4.x)$
- Es: $\int ch^3\ 2.x.dx = (\text{caso 5A}) = \int ch^2\ 2.x.ch\ 2.x.dx =$

$$= \int (1+sh^2\ 2.x).ch\ 2.x.dx = \frac{1}{2}.\int (1+z^2).dz = \ .... \ = g(z) = g(sh\ x)$$

$sh\ 2.x = z \Rightarrow ch\ 2.x.dx = dz/2$

Para calcular primitivas de la forma

$$\text{A)} \int \text{sh } ax.\text{ch } bx.dx,\ a \neq b$$
$$\text{B)} \int \text{sh } ax.\text{sh } bx.dx,\ a \neq b$$
$$\text{C)} \int \text{ch } ax.\text{ch } bx.dx,\ a \neq b$$

basta recordar las fórmulas:

$$\text{A) sh } ax.\text{ch } bx = \frac{\text{sh }(a+b).x + \text{sh }(a-b).x}{2},\ a \neq b$$
$$\text{B) sh } ax.\text{sh } bx = \frac{\text{ch }(a+b).x - \text{ch }(a-b).x}{2},\ a \neq b$$
$$\text{C) ch } ax.\text{ch } bx = \frac{\text{ch }(a+b).x + \text{ch }(a-b).x}{2},\ a \neq b$$

Con ellas transformaremos el problema de calcular la primitiva de un producto en el problema de calcular la primitiva de una suma.

✓ $$\int \text{sh } 2x.\text{ch } 6x.dx = \frac{1}{2}\int (\text{sh } 8x + \text{sh } 4x).dx =$$

$$\text{sh } 2x.\text{ch } 6x = \frac{\text{sh }(2+6).x + \text{sh }(2-6).x}{2} = \frac{\text{sh } 8x + \text{sh }(-4x)}{2} =$$
$$= \frac{\text{sh } 8x - \text{sh } 4x}{2},\ \text{pues sh }(-4x) = -\text{sh } 4x$$

$$= \frac{1}{16}.\text{ch } 8x + \frac{1}{8}.\text{ch } 4x + C$$

✓ $$\int \text{sh } 2x.\text{sh } 6x.dx = \frac{1}{2}\int (\text{ch } 8x - \text{ch } 4x).dx =$$

$$\text{sh } 2x.\text{sh } 6x = \frac{\text{ch }(2+6).x - \text{chs }(2-6).x}{2} = \frac{\text{ch } 8x - \text{ch }(-4x)}{2} =$$
$$= \frac{\text{ch } 8x - \text{ch } 4x}{2},\ \text{pues ch }(-4x) = \text{ch } 4x$$

$$= \frac{1}{16}.\text{sh } 8x - \frac{1}{8}.\text{sh } 4x + C$$

✓ $$\int \text{ch } 2x.\text{ch } 6x.dx = \frac{1}{2}\int (\text{ch } 8x + \text{ch } 4x).dx =$$

$$\text{ch } 2x.\text{ch } 6x = \frac{\text{ch }(2+6).x + \text{ch }(2-6).x}{2} = \frac{\text{ch } 8x + \text{ch }(-4x)}{2} =$$
$$= \frac{\text{ch } 8x + \text{ch } 4x}{2},\ \text{pues ch }(-4x) = \text{ch } 4x$$

$$= \frac{1}{16}.\text{sh } 8x + \frac{1}{8}.\text{sh } 4x + C$$

1.11 PRIMITIVAS DE ALGUNAS FUNCIONES IRRACIONALES

Al hablar de funciones irracionales nos referimos a funciones en que la variable aparece bajo el signo de radicación, como las siguientes:

$$f(x)=\sqrt{1+x}\ ;\ f(x)=(x^3+1).\sqrt{\frac{x-1}{x^2-2}}\ ;\ f(x)=\frac{1+\sqrt[5]{x+1}}{\sqrt{2-x}}$$

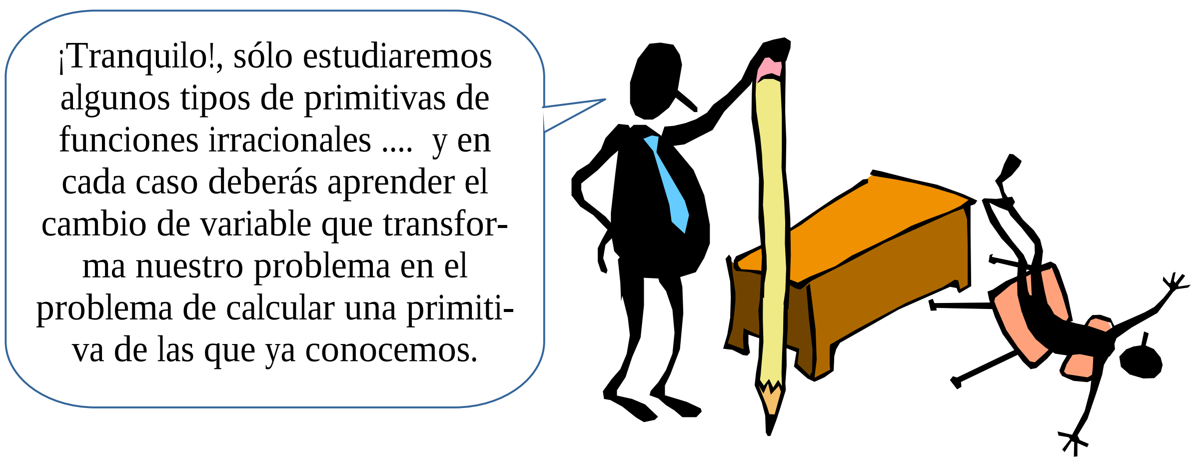
$$f(x)=\sqrt{x-x^7}\ ;\ f(x)=\frac{1+\sqrt[9]{7-x^5}+\sqrt[4]{1+x}}{x^5.\sqrt{1+x+x^2}}\ ;\ f(x)=\frac{(1+\sqrt{x}).\sqrt[5]{2-4.x}}{\sqrt{x+2}}$$

El problema de calcular la primitiva de una función irracional puede ser asunto inmediato, como en el caso

$$\int dx/\sqrt{1+x}=2.\sqrt{1+x}+C$$

o totalmente infumable incluso para los japoneses, como en el caso

$$\int \frac{1+\sqrt[9]{7-x^5}+\sqrt[4]{1+x}}{x^5.\sqrt{1+x+x^2}}.dx$$



1

Si el integrando f(x) es una ensalada de potencias del cociente de monomios $(a.x+b)/(c.x+d)$, haremos $(a.x+b)/(c.x+d)=z^k$, siendo "k" el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes de $(a.x+b)/(c.x+d)$

✓ $$\int \frac{1+\sqrt[3]{2.x-3}+\sqrt[4]{2.x-3}}{1-\sqrt[6]{2.x-3}}.dx=\int \frac{1+(2.x-3)^{1/3}+(2.x-3)^{1/4}}{1-(2.x-3)^{1/6}}.dx=$$

es m.c.m(3,4,6) = 12 $\Rightarrow$ hacemos $2.x-3=z^{12}\Rightarrow dx=6.z^{11}.dz$

calculamos la primitiva del cociente de polinomios

$$=\int \frac{1+z^4+z^3}{1-z^2}.6.z^{11}.dz=\ ....\ =g(z)=g((2.x-3)^{1/12})+C$$

deshacemos el cambio: $2.x-3=z^{12}\Rightarrow z=(2.x-3)^{1/12}$

✓ $$\int \frac{x+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}.dx = \int \frac{x+x^{1/3}}{1-x^{1/2}}.dx = \int \frac{z^6+z^2}{1-z^3}.6.z^5dz =$$

$\boxed{\text{es m.c.m}(2,3) = 6 \Rightarrow \text{hacemos } x = z^6 \Rightarrow dx = 6.z^5.dz}$

$\boxed{\text{calculamos la primitiva del cociente de polinomios}}$

$$= \ldots. = g(z) = g(x^{1/6}) + C$$

$\boxed{\text{deshacemos el cambio: } x = z^6 \Rightarrow z = x^{1/6}}$

2

Si el integrando f(x) contiene un único factor irracional de la forma $\sqrt{a^2 - b^2.x^2}$, lo haremos desaparecer con el cambio $b.x = a.\text{sen } z$, pues así:

$$\sqrt{a^2 - b^2.x^2} = \sqrt{a^2 - a^2.\text{sen}^2\, z} = a.\sqrt{1-\text{sen}^2\, z} = a.\cos z$$

✓ $$\int \sqrt{9-4.x^2}.dx = \frac{3}{2}.\int \sqrt{9-9.\text{sen}^2\, z}.\cos z.dz = \frac{9}{2}.\int \sqrt{1-\text{sen}^2\, z}.\cos z.dz =$$

$\boxed{2.x = 3.\text{sen } z \Rightarrow dx = \frac{3}{2}.\cos z.dz}$

$$= \frac{9}{2}.\int \cos^2 z.dz = \frac{9}{2}.\int \frac{1+\cos 2.z}{2}.dz = \frac{9}{2}.(\frac{1}{2}.z + \frac{1}{4}.\text{sen } 2.z) =$$

$$= \frac{9}{4}.\text{arc sen}\,\frac{2.x}{3} + \frac{9}{8}.\text{sen }(2.\text{arc sen}\,\frac{2.x}{3}) + C$$

$\boxed{\text{deshacemos el cambio: } 2.x = 3.\text{sen } z \Rightarrow \text{sen } z = \frac{2.x}{3} \Rightarrow z = \text{arc sen}\,\frac{2.x}{3}}$

NOTA 1

Antes de deshacer el cambio podemos escribir $\text{sen } 2.z = 2.\text{sen } z.\cos z$, y así:

$$\int \sqrt{9-4.x^2}.dx = \frac{9}{2}.(\frac{1}{2}.z + \frac{1}{4}.2.\text{sen } z.\cos z) = \frac{9}{4}.(z + \text{sen } z.\cos z) =$$

$$= \frac{9}{4}.(\text{arc sen}\,\frac{2.x}{3} + \frac{2.x}{3}.\sqrt{1-(\frac{2.x}{3})^2}) + C$$

deshacemos el cambio:

$$2.x = 3.\text{sen } z \Rightarrow \text{sen } z = \frac{2.x}{3} \Rightarrow \begin{cases} z = \text{arc sen}\,\frac{2.x}{3} \\ \cos z = \sqrt{1-(\frac{2.x}{3})^2} \end{cases}$$

NOTA 2

También podemos resolver la papeleta mediante el cambio $2.x = 3.\cos z$:

$$\int \sqrt{9-4.x^2}\,.dx = -\frac{3}{2}.\int \sqrt{9-9.\cos^2 z}.\text{sen } z.dz = -\frac{9}{2}.\int \sqrt{1-\cos^2 z}.\text{sen } z.dz =$$

$$\boxed{2.x = 3.\cos z \Rightarrow dx = -\frac{3}{2}.\text{sen } z.dz}$$

$$= -\frac{9}{2}.\int \text{sen}^2\, z.dz = -\frac{9}{2}.\int \frac{1-\cos 2.z}{2}.dz = -\frac{9}{2}.(\frac{1}{2}.z - \frac{1}{4}.\text{sen } 2.z) =$$

$$= -\frac{9}{4}.\arccos\frac{2.x}{3} + \frac{9}{8}.\text{sen}\,(2.\arccos\frac{2.x}{3}) + C$$

$$\boxed{\text{deshacemos el cambio: } 2.x = 3.\cos z \Rightarrow \cos z = \frac{2.x}{3} \Rightarrow z = \arccos\frac{2.x}{3}}$$

✓ $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{5-3.x^2}} = \int \frac{\sqrt{5/3}.\cos z.dz}{\sqrt{5/3}.\text{sen } z + \sqrt{5-5.\text{sen}^2 z}} =$$

$$\boxed{\sqrt{3}.x = \sqrt{5}.\text{sen } z \Rightarrow x = \sqrt{5/3}.\text{sen } z \Rightarrow dx = \sqrt{5/3}.\cos z.dz}$$

$$= \int \frac{\sqrt{5/3}.\cos z.dz}{\sqrt{5/3}.\text{sen } z + \sqrt{5}\sqrt{1-\text{sen}^2 z}} = \int \frac{\sqrt{5/3}.\cos z.dz}{\sqrt{5/3}.\text{sen } z + \sqrt{5}.\cos z} =$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Primitiva de la forma } \int R(\text{sen } z;\cos z).dx \Rightarrow \text{cambio tg}\,\frac{z}{2} = t,\ \text{para el que es:}\\ \text{sen } z = \frac{2.t}{1+t^2}\ ;\ \cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ dz = \frac{2.dt}{1+t^2}\end{array}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{5/3}.\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\sqrt{5/3}.\frac{2.t}{1+t^2} + \sqrt{5}.\frac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2} = \ .... \ = g(t) =$$

$$\boxed{\text{calculamos la primitiva del cociente de polinomios obtenido}}$$

$$= g(\text{tg}\,\frac{\text{arc sen }\sqrt{3/5}.x}{2}) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{deshacemos los cambios de variable realizados:}\\ t = \text{tg}\,\frac{z}{2} = \text{tg}\,\frac{\text{arc sen }\sqrt{3/5}.x}{2}\\ \boxed{\sqrt{3}.x = \sqrt{5}.\text{sen } z \Rightarrow z = \text{arc sen }\sqrt{3/5}.x}\end{array}}$$

3

Si el integrando f(x) contiene un único factor irracional de la forma $\sqrt{a^2+b^2.x^2}$, lo haremos desaparecer con el cambio $b.x=a.\text{tg } z$, pues así:

$$\sqrt{a^2+b^2.x^2}=\sqrt{a^2+a^2.\text{tg}^2 z}=a.\sqrt{1+\text{tg}^2 z}=a/\cos z$$

✓ $$\int\sqrt{9+4.x^2}.dx=\frac{3}{2}.\int\sqrt{9+9.\text{tg}^2 z}.\frac{dz}{\cos^2 z}=$$

$$2.x=3.\text{tg } z\Rightarrow dx=\frac{3}{2}.\frac{dz}{\cos^2 z}$$

$$=\frac{9}{2}.\int\sqrt{1+\text{tg}^2 z}.\frac{dz}{\cos^2 z}=\frac{9}{2}.\int\sqrt{\frac{1}{\cos^2 z}}.\frac{dz}{\cos^2 z}=\frac{9}{2}.\int\frac{dz}{\cos^3 z}=$$

como todo el mundo sabe, es $1+\text{tg}^2 z=1/\cos^2 z$

primitiva de la forma $\int \text{sen}^m x.\cos^n x.dx$, siendo impar algún exponente $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ expresamos el exponente impar como suma de un número par y de 1

$$=\frac{9}{2}.\int\frac{\cos z}{\cos^4 z}.dz=\frac{9}{2}.\int\frac{\cos z}{(1-\text{sen}^2 z)^2}.dz=$$

primitiva de la forma $\int R(\text{sen } z).\cos z.dz$, hacemos el cambio
$\text{sen } z=t\Rightarrow\cos z.dz=dt$

calculamos la primitiva del cociente de polinomios

$$=\frac{9}{2}.\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}=\ ....\ =g(t)=g(\text{sen arc tg}\frac{2.x}{3})+C$$

deshacemos los cambios de variable realizados:

$$t=\text{sen } z=\text{sen arc tg}\frac{2.x}{3}$$

$$2.x=3.\text{tg } z\Rightarrow z=\text{arc tg}\frac{2.x}{3}$$

✓ $$\int\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1+x^2}}.dx=\int\frac{\text{tg } z+\sqrt{1+\text{tg}^2 z}}{1-\sqrt{1+\text{tg}^2 z}}.\frac{dz}{\cos^2 z}=$$

$x=\text{tg } z\Rightarrow dx=dz/\cos^2 z$ $\qquad$ $1+\text{tg}^2 z=1/\cos^2 z$

$$=\int\frac{\text{tg } z+\sqrt{\frac{1}{\cos^2 z}}}{1-\sqrt{\frac{1}{\cos^2 z}}}.\frac{dz}{\cos^2 z}=\int\frac{\text{tg } z+\frac{1}{\cos z}}{1-\frac{1}{\cos z}}.\frac{dz}{\cos^2 z}=$$

$$= \int \frac{1+\cos z.\text{tg } z}{-1+\cos z}.\frac{dz}{\cos^2 z} = \int \frac{1+\cos z.\frac{\text{sen } z}{\cos z}}{-1+\cos z}.\frac{dz}{\cos^2 z} = \int \frac{1+\text{sen } z}{-1+\cos z}.\frac{dz}{\cos^2 z} =$$

descomponemos en suma de dos sumandos

$$= \int \frac{1}{-1+\cos z}.\frac{dz}{\cos^2 z} + \int \frac{\text{sen } z}{-1+\cos z}.\frac{dz}{\cos^2 z} = \ldots.$$

• Es: $\displaystyle \int \frac{1}{-1+\cos z}.\frac{dz}{\cos^2 z} = \int \frac{1}{-1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{\frac{2.dt}{1+t^2}}{(\frac{1-t^2}{1+t^2})^2} = \ldots.$

$\int R(\text{sen } z;\cos z).dx \Rightarrow$ cambio $\text{tg}\frac{z}{2} = t$, para el que es:

$$\cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ ; \ dz = \frac{2.dt}{1+t^2}$$

• Es: $\displaystyle \int \frac{\text{sen } z}{-1+\cos z}.\frac{dz}{\cos^2 z} = -\int \frac{dt}{-1+t}.\frac{dz}{t^2} = \ldots..$

primitiva de la forma $\int R(\cos z).\text{sen } z.dz$, hacemos el cambio $\cos z = t \Rightarrow \text{sen } z.dz = -dt$

4

Si el integrando f(x) contiene un único factor irracional de la forma $\sqrt{b^2.x^2 - a^2}$, lo haremos desaparecer con el cambio $b.x = a.\sec z$, pues así:

$$\sqrt{b^2.x^2 - a^2} = \sqrt{a^2.\sec^2 z - a^2} = a.\sqrt{\sec^2 z - 1} = a.\text{tg } z$$

✓ $$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}.dx = \int \frac{\sqrt{\sec^2 - 1}}{\sec^3 z}.\sec z.\text{tg } z.dz =$$

$x = \sec z \Rightarrow dx = \sec z.\text{tg } z.dz$ | $\sqrt{\sec^2 z - 1} = \text{tg } z$

$$= \int \frac{\text{tg } z}{\sec^3 z}.\sec z.\text{tg } z.dz = \int \frac{\text{tg}^2 z}{\sec^2 z}.dz = \int \frac{\text{sen}^2 z / \cos^2 z}{1/\cos^2 z}.dz =$$

$$= \int \text{sen}^2 z.dz = \int \frac{1-\cos 2.z}{2}.dz = \frac{1}{2}.(z - \frac{1}{2}.\text{sen } 2.z) = \frac{1}{2}.(z - \text{sen } z.\cos z) =$$

$$= \frac{1}{2}.(\text{arc cos}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}.\sqrt{1-(1/x)^2}) + C$$

$$x = \sec z = \frac{1}{\cos z} \Rightarrow \cos z = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} z = \text{arc cos}\frac{1}{x} \\ \text{sen } z = \sqrt{1-\cos^2 z} = \sqrt{1-(1/x)^2} \end{cases}$$

✓ $$\int \frac{x}{1+\sqrt{x^2-4}}.dx = \int \frac{2.\sec z}{1+\sqrt{4.\sec^2 z-4}}.\sec z.\text{tg } z.dz =$$

$$\boxed{x = 2.\sec z \Rightarrow dx = \sec z.\text{tg } z.dz}$$

$$= \int \frac{2.\sec z}{1+2.\sqrt{\sec^2 z-1}}.\sec z.\text{tg } z.dz = \int \frac{2.\sec^2 z.\text{tg } z}{1+2.\text{tg } z}.dz = 2.\int \frac{\frac{1}{\cos^2 z}.\frac{\text{sen } z}{\cos z}}{1+2.\frac{\text{sen } z}{\cos z}}.dz =$$

$$\boxed{\sqrt{\sec^2 z-1} = \text{tg } z}$$

$$= 2.\int \frac{\text{sen } z}{\cos^2 z.(\cos z+2.\text{sen } z)}.dz =$$

Primitiva de la forma $\int R(\text{sen } z;\cos z).dx \Rightarrow$ cambio $\text{tg}\frac{z}{2} = t$, para el que es:

$$\text{sen } z = \frac{2.t}{1+t^2} \;;\; \cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2} \;;\; dz = \frac{2.dt}{1+t^2}$$

calculamos la primitiva del cociente de polinomios

$$= 2.\int \frac{\frac{2.t}{1+t^2}}{(\frac{1-t^2}{1+t^2})^2.(\frac{1-t^2}{1+t^2}+2.\frac{2.t}{1+t^2})}.\frac{2.dt}{1+t^2} = \ldots. = g(t) = g(\text{tg}\frac{\text{arc cos } 2/x}{2}) + C$$

deshacemos los cambios realizados: $t = \text{tg}\frac{z}{2} = \text{tg}\frac{\text{arc cos } 2/x}{2}$

$$x = 2.\sec z = \frac{2}{\cos z} \Rightarrow \cos z = \frac{2}{x} \Rightarrow z = \text{arc cos } 2/x$$

5

Para calcular primitivas de la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}$$

manipularemos el polinomio $a.x^2+b.x+c$ para conseguir alguna de las siguientes inmediatas:

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{k^2-(u(x))^2}}.dx = \text{arc sen}\frac{u(x)}{k}$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2+k^2}}.dx = \text{arg sh}\frac{u(x)}{k}$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{(u(x))^2-k^2}}.dx = \text{arg ch}\frac{u(x)}{k}$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{27+6.x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-3)^2}} = \text{arc sen}\,\frac{x-3}{6} + C$$

$$27+6.x-x^2 = 27+9-(9-6.x+x^2) = 36-(x-3)^2$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2.x+17}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+16}} = \text{arg sh}\,\frac{x-1}{4} + C$$

$$x^2-2.x+17 = (x^2-2.x+1)-1+17 = (x-1)^2+16$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2.x-15}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-16}} = \text{arg ch}\,\frac{x-1}{4} + C$$

$$x^2-2.x-15 = (x^2-2.x+1)-1-15 = (x-1)^2-16$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{2.x^2+x-7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}.\sqrt{x^2+\frac{x}{2}-\frac{7}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2-\frac{57}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\text{arg ch}\,\frac{x+\frac{1}{4}}{\sqrt{57/16}} + C$$

$$x^2+\frac{x}{2}-\frac{7}{2} = (x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16})-\frac{1}{16}-\frac{7}{2} = (x+\frac{1}{4})^2-\frac{57}{16}$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{3.x^2+5.x+7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3}.\sqrt{x^2+\frac{5.x}{3}+\frac{7}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}.\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{5}{6})^2+\frac{59}{36}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\text{arg sh}\,\frac{x+\frac{5}{6}}{\sqrt{59/36}} + C$$

$$x^2+\frac{5.x}{3}-\frac{7}{3} = (x^2+\frac{5.x}{3}+\frac{25}{36})-\frac{25}{36}+\frac{7}{3} = (x+\frac{5}{6})^2+\frac{59}{36}$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{4+5.x-3.x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3}.\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}.x-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}.\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{73}{36}-(x-\frac{5}{6})^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\text{arc sen}\,\frac{x-\frac{5}{6}}{\sqrt{73/36}} + C$$

$$\frac{4}{3}+\frac{5}{3}.x-x^2 = \frac{4}{3}+\frac{25}{36}-(\frac{25}{36}-\frac{5}{3}.x+x^2) = \frac{73}{36}-(x-\frac{5}{6})^2$$

6

Siendo P(x) es un polinomio de grado mayor o igual que 1, para calcular primitivas de la forma

$$\int \frac{P(x).dx}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}} \quad \text{(I)}$$

usaremos el llamado ***método alemán***:

$$\int \frac{P(x).dx}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}} = Q(x).\sqrt{a.x^2+b.x+c} + \int \frac{\lambda.dx}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}} \quad \text{(II)}$$

donde Q(x) es un polinomio completo de coeficientes indeterminados y grado una unidad inferior al grado de P(x) y λ es un número indeterminado. Así, el problema de calcular (I), se transforma en el problema de calcular $\int \lambda.dx/\sqrt{a.x^2+b.x+c}$, que es del tipo 5.

Para calcular el valor de λ y los coeficientes de Q(x) derivaremos los dos miembros de (II); se obtiene:

$$\frac{P(x)}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}} = \frac{d(Q(x).\sqrt{a.x^2+b.x+c})}{dx} + \frac{\lambda}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}$$

Tras reducir a común denominador en el segundo miembro de la última igualdad e identificar los numeradores de ambos lados, llegaremos a un sistema lineal de ecuaciones cuyas incógnitas son los coeficientes de Q(x) y λ.

✓ $$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}}.dx = 1.\sqrt{x^2+x+1} - \frac{5}{2}.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{d(Q(x).\sqrt{x^2+x+1})}{dx} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{como } P(x)=x-2 \text{ tiene grado } 1 \Rightarrow Q(x) \text{ tiene grado } 0, \text{ o sea, es } Q(x)=k}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{d(k.\sqrt{x^2+x+1})}{dx} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{k.(2.x+1)}{2.\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{k.x+\frac{k}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2 = k.x+\frac{k}{2}+\lambda \Rightarrow \begin{cases} 1=k \\ -2=\frac{k}{2}+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ \lambda=-5/2 \end{cases}$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{5}{2}.\arg\operatorname{sh}\frac{2.x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \arg\operatorname{sh}\frac{x+(1/2)}{\sqrt{3/4}} = \arg\operatorname{sh}\frac{2.x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{x^2+x+1 = (x^2+x+\frac{1}{4}) - \frac{1}{4} + 1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

✓ $$\int \frac{3.x^3+2.x-1}{\sqrt{2.x^2+x+2}}.dx = (\frac{x^2}{2} - \frac{5.x}{16} + \frac{15}{64}).\sqrt{x^2+x+1} - \frac{63}{128}.\int \frac{dx}{\sqrt{2.x^2+x+2}} =$$

$$\frac{3.x^3+2.x-1}{\sqrt{2.x^2+x+2}} = \frac{d(Q(x).\sqrt{2.x^2+x+2})}{dx} + \frac{\lambda}{\sqrt{2.x^2+x+2}} \Rightarrow$$

como $P(x) = 3.x^3+2.x-1$ tiene grado $3 \Rightarrow Q(x)$ tiene grado 2, o sea:
$Q(x) = A.x^2+B.x+C$

$$\Rightarrow \frac{3.x^3+2.x-1}{\sqrt{2.x^2+x+2}} = \frac{d((A.x^2+B.x+C).\sqrt{2.x^2+x+2})}{dx} + \frac{\lambda}{\sqrt{2.x^2+x+2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3.x^3+2.x-1}{\sqrt{2.x^2+x+2}} = (2.A.x+B).\sqrt{2.x^2+x+2} + \frac{(A.x^2+B.x+C).(4.x+1)}{2.\sqrt{2.x^2+x+2}} +$$

$$+ \frac{\lambda}{\sqrt{2.x^2+x+2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^3+2x-1 = (2Ax+B).(2x^2+x+2) + (Ax^2+Bx+C).(2x+\frac{1}{2}) + \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^3+2x-1 = 6Ax^3 + (\frac{5A}{2}+4B)x^2 + (4A+\frac{3B}{2}+2C).x + (2B+\frac{C}{2}+\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3 = 6.A \\ 0 = \frac{5A}{2}+4B \\ 2 = 4A+\frac{3B}{2}+2C \\ -1 = 2B+\frac{C}{2}+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -5/16 \\ C = 15/64 \\ \lambda = -63/128 \end{array}\right.$$

$$= (\frac{x^2}{2} - \frac{5.x}{16} + \frac{15}{64}).\sqrt{x^2+x+1} - \frac{63}{128}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\arg\operatorname{sh}\frac{x+(1/4)}{\sqrt{15/16}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2.x^2+x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}.\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\arg\operatorname{sh}\frac{x+(1/4)}{\sqrt{15/16}}$$

$$\boxed{2.x^2+x+2 = 2.(x^2+\frac{x}{2}+1) = 2.((x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}) - \frac{1}{16}+1) = 2.((x+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16})}$$

7

Para calcular primitivas de la forma $\int \sqrt{a.x^2+b.x+c}.dx$, multiplicamos y dividimos por $\sqrt{a.x^2+b.x+c}$; así:

$$\int \sqrt{a.x^2+b.x+c}.dx = \int \frac{a.x^2+b.x+c}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}.dx$$

que es del tipo 6.

✓ $$\int \sqrt{2.x^2+3.x-1}.dx = \int \frac{2.x^2+3.x-1}{\sqrt{2.x^2+3.x-1}}.dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\right).\sqrt{2.x^2+3.x-1} - \frac{17}{16}.\int \frac{2.x^2+3.x-1}{\sqrt{2.x^2+3.x-1}}.dx =$$

$$\frac{2.x^2+3.x-1}{\sqrt{2.x^2+3.x-1}} = \frac{d(Q(x).\sqrt{2.x^2+3.x-1})}{dx} + \frac{\lambda}{\sqrt{2.x^2+3.x-1}} \Rightarrow$$

como $P(x) = 2.x^3+3.x-1$ tiene grado $2 \Rightarrow Q(x)$ tiene grado 1, o sea, es: $Q(x) = A.x + B.x$

$$\Rightarrow \frac{2.x^2+3.x-1}{\sqrt{2.x^2+3.x-1}} = \frac{d((A.x+B).\sqrt{2.x^2+3.x-1})}{dx} + \frac{\lambda}{\sqrt{2.x^2+3.x-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.x^2+3.x-1}{\sqrt{2.x^2+3.x-1}} = A.\sqrt{2.x^2+3.x-1} + \frac{(A.x+B).(4.x+3)}{2.\sqrt{2.x^2+3.x-1}} +$$

$$+\frac{\lambda}{\sqrt{2.x^2+3.x-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.x^2+3.x-1 = A.(2.x^2+3.x-1) + (A.x+B).(2.x+\frac{3}{2}) + \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.x^2+3.x-1 = 4.A.x^2 + \left(\frac{9.A}{2}+2.B\right).x + \left(-A+\frac{3.B}{2}+\lambda\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 = 4.A \\ 3 = \dfrac{9.A}{2} + 2.B \\ -1 = -A + \dfrac{3.B}{2} + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = 3/8 \\ \lambda = -17/16 \end{array}\right.$$

$$= \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\right).\sqrt{2.x^2+3.x-1} - \frac{17}{16}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\arg\operatorname{ch}\frac{x+(3/4)}{\sqrt{17/16}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2.x^2+3.x-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}.\sqrt{(x+\frac{3}{4})^2-\frac{17}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\arg\operatorname{ch}\frac{x+(3/4)}{\sqrt{17/16}}$$

$$2.x^2+3.x-1 = 2.\left(\left(x^2+\frac{3.x}{2}+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}-\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{16}\right)$$

8

Siendo "k" un número natural, para calcular una primitiva de la forma

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k.\sqrt{a.x^2+b.x+c}}$$

haremos el cambio de variable $1/(x-\alpha)=z$, que en el caso $k=1$ nos conducirá a una primitiva tipo 5, y si $k>1$ nos conducirá a una primitiva tipo 6 (método alemán).

✓ $$\int \frac{dx}{(x-1).\sqrt{2.x^2-x+1}} = \int \frac{z.(-dz/z^2)}{\sqrt{2.(1+\frac{1}{z})^2-(1+\frac{1}{z})+1}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{x-1}=z \Rightarrow x-1=\frac{1}{z} \Rightarrow x=1+\frac{1}{z} \Rightarrow dx=-dz/z^2}$$

$$= \int \frac{z.(-dz/z^2)}{\sqrt{2+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z}-1-\frac{1}{z}+1}} = \int \frac{z.(-dz/z^2)}{\sqrt{2+\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z}}} =$$

$$= \int \frac{z.(-dz/z^2)}{\sqrt{\frac{2.z^2+2+3.z}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{2.z^2+3.z+2}} =$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{2}.\sqrt{(z+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{16}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\text{arg sh}\,\frac{z+\frac{3}{4}}{\sqrt{7/16}} =$$

$$\boxed{2.z^2+3.z+2=2.((z^2+\frac{3.z}{2}+\frac{9}{16})-\frac{9}{16}+1)=2.((z+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{16})}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}.\text{arg sh}\,\frac{4.z+3}{\sqrt{7}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\text{arg sh}\,\frac{\frac{4}{x-1}+3}{\sqrt{7}} + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z=1/(x-1)$

✓ $$\int \frac{dx}{x^3.\sqrt{x^2+3.x-1}} = \int \frac{z^3.(-dz/z^2)}{\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z}-1}} = \int \frac{z^3.(-dz/z^2)}{\sqrt{\frac{-z^2+3.z+1}{z^2}}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{x}=z \Rightarrow x=\frac{1}{z} \Rightarrow dx=-dz/z^2}$$

$$= -\int \frac{z^2.dz}{\sqrt{-z^2+3.z+1}} = \;....$$

tipo 6, método alemán

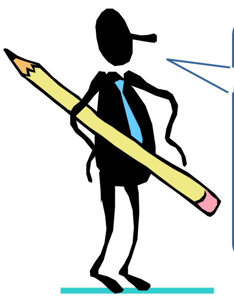
9

A la hora de calcular la primitiva de una función de la forma $R(x;\sqrt{a.x^2+b.x+c})$, distinguimos tres situaciones:

A) Si $a>0 \Rightarrow$ cambio $\sqrt{a.x^2+b.x+c}=\sqrt{a}.x+z$

B) Si $c>0 \Rightarrow$ cambio $\sqrt{a.x^2+b.x+c}=x.z+\sqrt{c}$

C) Si $a<0 \Rightarrow$ cambio $\sqrt{a.x^2+b.x+c}=(x-\alpha).z$, siendo α una de las soluciones de la ecuación $a.x^2+b.x+c=0$



Observa que puede haber "solapes"; por ejemplo, siendo

$$I_1=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+4}}\ ;\ I_2=\int\frac{dx}{x-\sqrt{-x^2+4.x+1}}$$

el cálculo de I_1 corresponde al caso 9A o al 9B, y el de I_2 corresponde al caso 9B o al 9C

✓ $$\int\frac{dx}{x+\sqrt{9.x^2+2.x-1}}=\int\frac{\frac{1}{2}.\frac{-3.z^2+2.z+3}{(1-3.z)^2}.dz}{\frac{z^2+1}{2.(1-3.z)}+(\sqrt{9}.\frac{z^2+1}{2.(1-3.z)}+z)}=$$

Caso 9A $\Rightarrow$ hacemos el cambio $\sqrt{9.x^2+2.x-1}=\sqrt{9}.x+z$, y así:

$$9.x^2+2.x-1=(\sqrt{9}.x+z)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9.x^2+2.x-1=9.x^2+6.x.z+z^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2.x-1=6.x.z+z^2\Rightarrow 2.x-6.x.z=z^2+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2.x.(1-3.z)=z^2+1\Rightarrow x=\frac{z^2+1}{2.(1-3.z)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{9.x^2+2.x-1}=\sqrt{9}.\dfrac{z^2+1}{2.(1-3.z)}+z\\ dx=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2.z.(1-3.z)-(z^2+1).(-3)}{(1-3.z)^2}.dz=\dfrac{1}{2}.\dfrac{-3.z^2+2.z+3}{(1-3.z)^2}.dz\end{cases}$$

calculamos la primitiva del cociente de polinomios

$$=\ ....\ =g(z)=g(\sqrt{9.x^2+2.x-1}-\sqrt{9}.x)+C$$

deshacemos el cambio:

si $\sqrt{9.x^2+2.x-1}=\sqrt{9}.x+z\Rightarrow z=\sqrt{9.x^2+2.x-1}-\sqrt{9}.x$

✓ $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+4}} = \int \frac{\frac{4.z^2-2.z+4}{(1-z^2)^2}.dz}{\frac{4.z-1}{1-z^2}+(\frac{4.z-1}{1-z^2}.z+\sqrt{4})} =$$

Corresponde al caso 9A o al 9B, y la calculamos como 9B; o sea, hacemos el cambio $\sqrt{x^2+x+4} = x.z+\sqrt{4}$; así:

$$x^2+x+4 = (x.z+\sqrt{4})^2 \Rightarrow x^2+x+4 = x^2.z^2+4.x.z+4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+x = x^2.z^2+4.x.z \Rightarrow x+1 = x.z^2+4.z$$
$$\Rightarrow x-x.z^2 = 4.z-1 \Rightarrow x.(1-z^2) = 4.z-1 \Rightarrow x = \frac{4.z-1}{1-z^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+4} = \frac{4.z-1}{1-z^2}.z+\sqrt{4} \\ dx = \frac{4.(1-z^2)-(4.z-1).(-2.z)}{(1-z^2)^2}.dz = \frac{4.z^2-2.z+4}{(1-z^2)^2}.dz \end{cases}$$

calculamos la primitiva del cociente de polinomios

$$= \;....\; = g(z) = g(\frac{\sqrt{9.x^2+2.x-1}-\sqrt{4}}{x})+C$$

deshacemos el cambio:

si $\sqrt{x^2+x+4} = x.z+\sqrt{4} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{9.x^2+2.x-1}-\sqrt{4}}{x}$

✓ $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{-x^2+x+2}} = \int \frac{\frac{6.z}{(1+z^2)^2}.dz}{\frac{2.z^2-1}{1+z^2}+(\frac{2.z^2-1}{1+z^2}-2).z} =$$

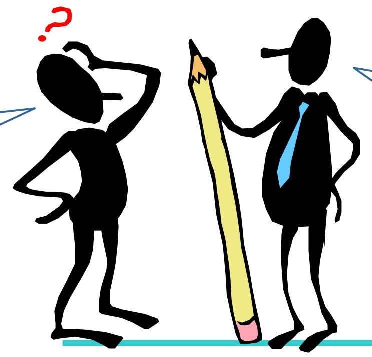
Corresponde al caso 9B o al 9C, y la calculamos como 9C; o sea, hacemos el cambio $\sqrt{-x^2+x+2} = (x-\alpha).z$, siendo α una de las raíces de la ecuación $-x^2+x+2=0$ ($\Rightarrow x=2$ ó $x=-1 \Rightarrow -x^2+x+2 = -(x-2).(x+1)$). Así:

$$\sqrt{-x^2+x+2} = (x-2).z \Rightarrow \sqrt{-(x-2).(x+1)} = (x-2).z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -(x-2).(x+1) = (x-2)^2.z^2 \Rightarrow -(x+1) = (x-2).z^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x.(1+z^2) = 2.z^2-1 \Rightarrow x = \frac{2.z^2-1}{1+z^2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2+x+2} = (\frac{2.z^2-1}{1+z^2}-2).z \\ dx = \frac{4.z.(1+z^2)-(2.z^2-1).(2.z)}{(1+z^2)^2}.dz = \frac{6.z}{(1+z^2)^2}.dz \end{cases}$$

calculamos la primitiva del cociente de polinomios

$$= \ldots = g(z) = g\left(\frac{\sqrt{-x^2+x+2}}{x-2}\right) + C$$

deshacemos el cambio:
$\sqrt{-x^2+x+2} = (x-2).z \Rightarrow z = \dfrac{\sqrt{-x^2+x+2}}{x-2}$



10

Se llaman irracionales "binomias" a las primitivas de la forma:

$$\int x^m.(a+b.x^n)^p.dx$$

donde los exponentes "m", "n" y "p" son números racionales. Se transforma en la primitiva de un cociente de polinomios en los siguientes casos:

A) Si "p" es entero la primitiva es del tipo $1 \Rightarrow$ cambio $x = z^k$, con $k = $ m.c.m.(denominadores de "m" y "n").

B) Si $(m+1)/n$ es entero $\Rightarrow$ cambio $a + b.x^n = z^r$, siendo "r" el denominador de "p".

C) Si $\dfrac{m+1}{n} + p$ es entero $\Rightarrow$ cambio $a.x^{-n} + b = z^r$, siendo "r" el denominador de "p".

Fuera de estos tres casos, la primitiva no puede expresarse mediante funciones elementales

✓ $$\int \frac{\sqrt{x}}{(1-5.\sqrt[3]{x})^2}.dx = \int x^{1/2}.(1-5.x^{1/3})^{-2}.dx =$$

caso 10A ($p = -2$ es entero) $\Rightarrow$ cambio $x = z^{m.c.m(2,3)} = z^6 \Rightarrow dx = 6.z^5.dz$

$$= \int z^3.(1-5.z^2)^{-2}.6.z^5.dz =$$

$$= 6.\int \frac{z^8}{(1-5.z^2)^2}.dy = \ldots = g(z) = g(x^{1/6}) + C$$

deshacemos el cambio: $x = z^6 \Rightarrow z = x^{1/6}$

✓ $\int x^{-1/2}.(1+x^{1/4})^{1/3}.dx =$

Primitiva del tipo $\int x^{m}.(a+b.x^{n})^{p}.dx$ (irracional "binomia"), siendo:

$m=-1/2\ ;\ n=1/4\ ;\ p=1/3$

Como $\frac{m+1}{n}=\frac{(-1/2)+1}{1/4}=2\equiv \text{entero} \Rightarrow$ hacemos el cambio $1+x^{1/4}=z^3$:

$1+x^{1/4}=z^3 \Rightarrow x=(z^3-1)^4 \Rightarrow dx=12.z^2.(z^3-1)^3.dz$

$$=\int ((z^3-1)^4)^{-1/2}.(z^3)^{1/3}.12.z^2.(z^3-1)^3.dz=$$

$$=12.\int (z^3-1).z^3.dz=12.\int (z^6-z^3).dz=$$

$$=12.(\frac{1}{7}.z^7-\frac{1}{4}.z^4)=\frac{12}{7}.(1+x^{1/4})^{7/3}-3.(1+x^{1/4})^{4/3}+C$$

deshacemos el cambio: $1+x^{1/4}=z^3 \Rightarrow z=(1+x^{1/4})^{1/3}$

✓ $\int \frac{\sqrt{1+3.x^2}}{x^4}.dx=\int x^{-4}.(1+3.x^2)^{1/2}.dx=$

Primitiva del tipo $\int x^{m}.(a+b.x^{n})^{p}.dx$ (irracional "binomia"), siendo:

$m=-4\ ;\ n=2\ ;\ p=1/2$

Como $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-4+1}{2}+\frac{1}{2}=-1\equiv \text{entero} \Rightarrow$ cambio $1.x^{-2}+3=z^2$:

$1.x^{-2}+3=z^2 \Rightarrow x=(z^2-3)^{-1/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (1+3.x^2)^{1/2}=(1+3.(z^2-3)^{-1})^{1/2}=z/(z^2-3)^{1/2} \\ dx=-z.(z^2-3)^{-3/2}.dz \end{cases}$

$$=-\int ((z^2-3)^{-1/2})^{-4}.\frac{z}{(z^2-3)^{1/2}}.z.(z^2-3)^{-3/2}.dz=$$

$$=-\int ((z^2-3)^{2}.\frac{z}{(z^2-3)^{1/2}}.z.(z^2-3)^{-3/2}.dz=$$

$$=-\int z^2.dz=-\frac{1}{3}.z^3=-\frac{1}{3}.(x^{-2}+3)^{3/2}+C$$

deshacemos el cambio: $1.x^{-2}+3=z^2 \Rightarrow z=(x^{-2}+3)^{1/2}$

1.12 CÁLCULO DE PRIMITIVAS POR REDUCCIÓN

Este método se usa para calcular primitivas de funciones famosas que van afectadas de exponentes (normalmente enteros) grandes.

✓ $$I_m = \int (\text{Ln } x)^m.dx = x.(\text{Ln } x)^m - m.\int (\text{Ln } x)^{m-1}.dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} * \ u = (\text{Ln } x)^m \Rightarrow du = \dfrac{m}{x}.(\text{Ln } x)^{m-1}.dx \\ * \ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}}$$

$$\Rightarrow I_m = x.(\text{Ln } x)^m - m.I_{m-1}$$

$$\boxed{\text{es: } \int (\text{Ln } x)^{m-1}.dx = I_{m-1}}$$

Por ejemplo:

$$I_3 = \int (\text{Ln } x)^3.dx = x.(\text{Ln } x)^3 - 3.I_2 =$$

$$\boxed{\text{es: } I_2 = \int (\text{Ln } x)^2.dx = x.(\text{Ln } x)^2 - 2.I_1}$$

$$= x.(\text{Ln } x)^3 - 3.(x.(\text{Ln } x)^2 - 2.I_1) =$$

$$= x.(\text{Ln } x)^3 - 3.x.(\text{Ln } x)^2 + 6.I_1 =$$

$$\boxed{\text{es: } I_1 = \int (\text{Ln } x)^1.dx = x.(\text{Ln } x)^1 - 2.I_0}$$

$$= x.(\text{Ln } x)^3 - 3.x.(\text{Ln } x)^2 + 6.\left(x.(\text{Ln } x)^1 - 2.I_0\right) =$$

$$= x.(\text{Ln } x)^3 - 3.x.(\text{Ln } x)^2 + 6.x.\text{Ln } x - 12.I_0 =$$

$$= x.(\text{Ln } x)^3 - 3.x.(\text{Ln } x)^2 + 6.x.\text{Ln } x - 12.x + C$$

$$\boxed{\text{es: } I_0 = \int (\text{Ln } x)^0.dx = \int dx = x}$$

✓ $$I_m = \int \text{sen}^m x.dx = \int \text{sen}^{m-1} x.\text{sen } x.dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} * \ u = \text{sen}^{m-1} x \Rightarrow du = (m-1).\cos x.\text{sen}^{m-2} x.dx \\ * \ dv = \text{sen } x.dx \Rightarrow v = \int \text{sen } x.dx = -\cos x \end{array}}$$

$$\Rightarrow I_m = -\text{sen}^{m-1} x.\cos x + (m-1).\int \text{sen}^{m-2} x.\cos^2 x.dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_m = -\text{sen}^{m-1} x.\cos x + (m-1).(I_{m-2} - I_m) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \int \text{sen}^{m-2} x.\cos^2 x.dx = \int \text{sen}^{m-2} x.(1-\text{sen}^2 x).dx = \\ = \int \text{sen}^{m-2} x.dx - \int \text{sen}^m x.dx = I_{m-2} - I_m \end{array}}$$

$$\Rightarrow m.I_m = -\text{sen}^{m-1} x.\cos x + (m-1).I_{m-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_m = -\frac{1}{m}.\text{sen}^{m-1} x.\cos x + \frac{m-1}{m}.I_{m-2}$$

Por ejemplo:

$$I_4 = \int \text{sen}^4 x.dx = -\frac{1}{4}.\text{sen}^3 x.\cos x + \frac{4-1}{4}.I_2 = ...$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}.\text{sen } x.\cos x + \frac{2-1}{2}.I_0 = ...$$

$$\text{es: } I_0 = \int \text{sen}^0 x.dx = \int dx = x$$

✓ $$I_m = \int \cos^m x.dx = \int \cos^{m-1} x.\cos x.dx \Rightarrow$$

$$* \; u = \cos^{m-1} x \Rightarrow du = -(m-1).\text{sen } x.\cos^{m-2} x.dx$$
$$* \; dv = \cos x.dx \Rightarrow v = \int \cos x.dx = \text{sen } x$$

$$\Rightarrow I_m = \text{sen } x.\cos^{m-1} x + (m-1).\int \text{sen}^2 x.\cos^{m-2} x.dx \Rightarrow$$

$$\text{es: } \int \text{sen}^2 x.\cos^{m-2} x.dx = \int (1-\cos^2 x).\cos^{m-2} x.dx =$$
$$= \int \cos^{m-2} x.dx - \int \cos^m x.dx = I_{m-2} - I_m$$

$$\Rightarrow I_m = \text{sen } x.\cos^{m-1} x + (m-1).(I_{m-2} - I_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m.I_m = \text{sen } x.\cos^{m-1} x + (m-1).I_{m-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{1}{m}.\text{sen } x.\cos^{m-1} x + \frac{m-1}{m}.I_{m-2}$$

✓ $$I_{m;n} = \int \text{sen}^m x.\cos^n x.dx = \int \text{sen}^{m-1} x.\cos^n x.\text{sen } x.dx \Rightarrow$$

$$* \; u = \text{sen}^{m-1} x \Rightarrow du = (m-1).\cos x.\text{sen}^{m-2} x.dx$$
$$* \; dv = \text{sen } x.\cos^n x.dx \Rightarrow v = \int \text{sen } x.\cos^n x.dx = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x$$

$$\Rightarrow I_{m;n} = -\frac{1}{n+1}.\text{sen}^{m-1} x.\cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}.\int \text{sen}^{m-2} x.\cos^{n+2} x.dx \Rightarrow$$

$$\int \text{sen}^{m-2} x.\cos^{n+2} x.dx = \int \text{sen}^{m-2} x.\cos^n x.\cos^2 x.dx =$$
$$= \int \text{sen}^{m-2} x.\cos^n x.(1-\text{sen}^2 x).dx =$$
$$= \int \text{sen}^{m-2} x.\cos^n x.dx - \int \text{sen}^m x.\cos^n x.dx = I_{m-2;n} - I_{m;n}$$

$$\Rightarrow I_{m;n} = -\frac{1}{n+1}.\text{sen}^{m-1} x.\cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}.(I_{m-2;n} - I_{m;n}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{m-1}{n+1}).I_{m;n} = -\frac{1}{n+1}.\text{sen}^{m-1} x.\cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}.I_{m-2;n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m+n}{n+1}.I_{m;n} = -\frac{1}{n+1}.\text{sen}^{m-1} x.\cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}.I_{m-2;n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{m;n} = -\frac{1}{m+n}.\text{sen}^{m-1} x.\cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n}.I_{m-2;n}$$

También se puede trabajar así:

$$I_{m;n}=\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x.dx=\int \operatorname{sen}^m x.\cos^{n-1} x.\cos x.dx \Rightarrow$$

$$*\ u=\cos^{n-1} x \Rightarrow du=-(n-1).\operatorname{sen} x.\cos^{n-2} x.dx$$

$$*\ dv=\operatorname{sen}^m x.\cos x.dx \Rightarrow v=\int \operatorname{sen}^m x.\cos x.dx=\frac{1}{m+1}\operatorname{sen}^{m+1} x$$

$$\Rightarrow I_{m;n}=\frac{1}{m+1}.\operatorname{sen}^{m+1} x.\cos^{n-1} x+\frac{n-1}{m+1}.\int \operatorname{sen}^{m+2}x.\cos^{n-2} x.dx \Rightarrow$$

$$\int \operatorname{sen}^{m+2}x.\cos^{n-2} x.dx=\int \operatorname{sen}^{m}x.\cos^{n-2} x.\operatorname{sen}^2 x.dx=$$

$$=\int \operatorname{sen}^{m}x.\cos^{n-2} x.(1-\cos^2 x).dx=$$

$$=\int \operatorname{sen}^{m}x.\cos^{n-2} x.dx-\int \operatorname{sen}^{m} x.\cos^{n} x.dx=I_{m;n-2}-I_{m;n}$$

$$\Rightarrow I_{m;n}=\frac{1}{m+1}.\operatorname{sen}^{m+1} x.\cos^{n-1} x+\frac{n-1}{m+1}.(I_{m;n-2}-I_{m;n})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\frac{n-1}{m+1}).I_{m;n}=\frac{1}{m+1}.\operatorname{sen}^{m+1} x.\cos^{n-1} x+\frac{n-1}{m+1}.I_{m;n-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m+n}{m+1}.I_{m;n}=\frac{1}{m+1}.\operatorname{sen}^{m+1} x.\cos^{n-1} x+\frac{n-1}{m+1}.I_{m;n-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{m;n}=\frac{1}{m+n}.\operatorname{sen}^{m+1} x.\cos^{n-1} x+\frac{n-1}{m+n}.I_{m;n-2}$$

Por ejemplo:

$$I_{6;4}=\int \operatorname{sen}^6 x.\cos^4 x.dx=\frac{1}{6+4}.\operatorname{sen}^7 x.\cos^3 x+\frac{4-1}{6+4}.I_{6;2}=\ .....$$

$$I_{6;2}=\int \operatorname{sen}^6 x.\cos^2 x.dx=\frac{1}{6+2}.\operatorname{sen}^7 x.\cos x+\frac{2-1}{6+2}.I_{6;0}=\ .....$$

$$I_{6;0}=\int \operatorname{sen}^6 x.\cos^0 x.dx=$$

$$\text{es}\quad J_k=\int \operatorname{sen}^k x.dx=-\frac{1}{k}.\operatorname{sen}^{k-1} x.\cos x+\frac{k-1}{k}.\,J_{k-2}$$

$$=-\frac{1}{6}.\operatorname{sen}^{6-1} x.\cos x+\frac{6-1}{6}.\,J_4=\ ....$$

$$\text{es}\quad J_4=\int \operatorname{sen}^4 x.dx=-\frac{1}{4}.\operatorname{sen}^{4-1} x.\cos x+\frac{4-1}{4}.\,J_2=\ ....$$

$$\text{es}\quad J_2=\int \operatorname{sen}^2 x.dx=-\frac{1}{2}.\operatorname{sen}^{2-1} x.\cos x+\frac{2-1}{2}.\,J_0=\ ....$$

$$\text{es}\quad J_0=\int \operatorname{sen}^0 x.dx=\int dx=x$$

✓ $$I_m = \int tg^m x.dx = \int sen^m x.cos^{-m} x.dx =$$
$$= \int sen^{m-1} x.cos^{-m} x.sen\ x.dx \Rightarrow$$

$$* \ u = sen^{m-1} x \Rightarrow du = (m-1).cos\ x.sen^{m-2} x.dx$$
$$* \ dv = sen\ x.cos^{-m} x.dx \Rightarrow v = \int sen\ x.cos^{-m} x.dx = -\frac{1}{-m+1} cos^{-m+1} x$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{1}{m+1}.sen^{m-1} x.cos^{-m+1} x - \int sen^{m-2} x.cos^{-m+2} x.dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I_m = \frac{1}{m+1}.tg^{m-1} x - \int tg^{m-2} x.dx \Rightarrow$$

$$* \ sen^{m-1} x.cos^{-m+1} x = \frac{sen^{m-1} x}{cos^{m-1} x} = tg^{m-1} x$$
$$* \ sen^{m-2} x.cos^{-m+2} x = \frac{sen^{m-2} x}{cos^{m-2} x} = tg^{m-2} x$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{1}{m+1}.tg^{m-1} x - I_{m-2}$$

✓ $$I_m = \int ctg^m x.dx = \int sen^{-m} x.cos^m x.dx =$$
$$= \int sen^{-m} x.cos^{m-1} x.cos\ x.dx \Rightarrow$$

$$* \ u = cos^{m-1} x \Rightarrow du = -(m-1).sen\ x.cos^{m-2} x.dx$$
$$* \ dv = cos\ x.sen^{-m} x.dx \Rightarrow v = \int cos\ x.sen^{-m} x.dx = \frac{1}{-m+1} sen^{-m+1} x$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{1}{-m+1}.sen^{-m+1} x.cos^{m-1} x - \int sen^{-m+2} x.cos^{m-2} x.dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I_m = \frac{1}{-m+1}.ctg^{m-1} x - \int ctg^{m-2} x.dx \Rightarrow$$

$$* \ sen^{-m+1} x.cos^{m-1} x = \frac{cos^{m-1} x}{sen^{m-1} x} = ctg^{m-1} x$$
$$* \ sen^{-m+2} x.cos^{m-2} x = \frac{cos^{m-2} x}{sen^{m-2} x} = ctg^{m-2} x$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{1}{-m+1}.ctg^{m-1} x - I_{m-2}$$

✓ $$I_k = \int (arc\ sen\ x)^k.dx = x.(arc\ sen\ x)^k - k.\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(arc\ sen\ x)^{k-1}.dx =$$

$$* \ u = (arc\ sen\ x)^k \Rightarrow du = \frac{k}{\sqrt{1-x^2}}.(arc\ sen\ x)^{k-1}.dx$$
$$* \ dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$= x.(\text{arc sen } x)^k - k.\left[-\sqrt{1-x^2}.(\text{arc sen } x)^{k-1} + (k-1).\int (\text{arc sen } x)^{k-2}.dx\right] =$$

$$\boxed{\begin{gathered} * \; u = (\text{arc sen } x)^{k-1} \Rightarrow du = \frac{k-1}{\sqrt{1-x^2}}.(\text{arc sen } x)^{k-2}.dx \\ * \; dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx \Rightarrow v = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx = -\sqrt{1-x^2} \end{gathered}}$$

$$= x.(\text{arc sen } x)^k + k.\sqrt{1-x^2}.(\text{arc sen } x)^{k-1} - k.(k-1).I_{k-2}$$

$$\boxed{\int (\text{arc sen } x)^{k-2}.dx = I_{k-2}}$$

✓ $$I_k = \int (\text{arc cos } x)^k.dx = x.(\text{arc cos } x)^k + k.\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(\text{arc cos } x)^{k-1}.dx =$$

$$\boxed{\begin{gathered} * \; u = (\text{arc cos } x)^k \Rightarrow du = -\frac{k}{\sqrt{1-x^2}}.(\text{arc cos } x)^{k-1}.dx \\ * \; dv = dx \Rightarrow v = x \end{gathered}}$$

$$= x.(\text{arc cos } x)^k + k.\left[-\sqrt{1-x^2}.(\text{arc cos } x)^{k-1} - (k-1).\int (\text{arc cos } x)^{k-2}.dx\right] =$$

$$\boxed{\begin{gathered} * \; u = (\text{arc cos } x)^{k-1} \Rightarrow du = -\frac{k-1}{\sqrt{1-x^2}}.(\text{arc cos } x)^{k-2}.dx \\ * \; dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx \Rightarrow v = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx = -\sqrt{1-x^2} \end{gathered}}$$

$$= x.(\text{arc cos } x)^k - k.\sqrt{1-x^2}.(\text{arc cos } x)^{k-1} - k.(k-1).I_{k-2}$$

$$\boxed{\int (\text{arc cos } x)^{k-2}.dx = I_{k-2}}$$

✓ $$I_k = \int \sec^k x.dx = \int \frac{dx}{\cos^k x} = \int \frac{1}{\cos^{k-2} x}.\frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_k = \frac{\text{sen } x}{\cos^{k-1} x} - (k-2)\int \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^k x}.dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} * \; u = \frac{1}{\cos^{k-2} x} \Rightarrow du = (k-2).\frac{\text{sen } x}{\cos^{k-1} x}.dx \\ * \; dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \int \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^k x}.dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^k x}.dx = \int \frac{dx}{\cos^k x} - \int \frac{dx}{\cos^{k-2} x} = \\ = \int \sec^k x.dx - \int \sec^{k-2} x.dx = I_k - I_{k-2} \end{gathered}}$$

$$\Rightarrow I_k = \frac{\text{sen } x}{\cos^{k-1} x} - (k-2).(I_k - I_{k-2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-1).I_k = \frac{\text{sen } x}{\cos^{k-1} x} + (k-2).I_{k-2} \Rightarrow I_k = \frac{1}{k-1}.\frac{\text{sen } x}{\cos^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1}.I_{k-2}$$

✓ $$I_k = \int \operatorname{cosec}^k x.dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^k x} = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^{k-2} x}.\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_k = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{k-1} x} - (k-2)\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^k x}.dx \Rightarrow$$

$$* \; u = \frac{1}{\operatorname{sen}^{k-2} x} \Rightarrow du = -(k-2).\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{k-1} x}.dx$$

$$* \; dv = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg}\, x = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^k x}.dx = \int \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^k x}.dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^k x} - \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{k-2} x} =$$
$$= \int \operatorname{cosec}^k x.dx - \int \operatorname{cosec}^{k-2} x.dx = I_k - I_{k-2}$$

$$\Rightarrow I_k = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{k-1} x} - (k-2).(I_k - I_{k-2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_k = -\frac{1}{k-1}.\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1}.I_{k-2}$$

NOTA

Para despedir el cálculo de primitivas, comentamos una chorradita que acaso debimos comentar al principio, pero no pasa nada por comentarla al final: la función derivada de $F(x) = 2.x^3$ es $f(x) = 6.x^2$; así, una de las primitivas de $f(x) = 6.x^2$ es $F(x) = 2.x^3$, y la primitiva de f(x) es $\int 6.x^2.dx = 2.x^3 + C$.

✓ ***Pregunta:*** ¿qué primitiva de $f(x) = 6.x^2$ pasa por el punto $(1;8)$?

Respuesta: la que corresponde al valor de "C" tal que $2.1^3 + C = 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow C = 6 \Rightarrow$ la primitiva de $f(x) = 6.x^2$ que pasa por (1;8) es $u(x) = 2.x^3 + 6$

✓ ***Pregunta:*** ¿qué primitiva de $f(x) = 6.x^2$ pasa por el punto $(0;5)$?

Respuesta: la que corresponde al valor de "C" tal que $2.0^3 + C = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow C = 5 \Rightarrow$ la primitiva de $f(x) = 6.x^2$ que pasa por $(0;5)$ es $v(x) = 2.x^3 + 5$

✓ ***Pregunta:*** ¿qué primitiva de $f(x) = 6.x^2$ pasa por $(2;13)$ y $(3;60)$?

Respuesta: la que verifica $2.2^3 + C = 13$ y $2.3^3 + C = 60$; de la primera ecuación se obtiene $C = -3$ y de la segunda se obtiene $C = 6$. Como "C" no puede tomar a la vez dos valores distintos, se deduce que no hay ninguna primitiva de $f(x) = 6.x^2$ que pase por los puntos $(2;13)$ y $(3;60)$.

✓ ***Pregunta:*** ¿qué primitiva de $f(x) = 6.x^2$ pasa por los puntos (1;9) y $(0;7)$?

Respuesta: la que verifica $2.1^3 + C = 9$ y $2.0^3 + C = 7$; de ambas ecuaciones se obtiene $C = 7$. Por tanto, la primitiva de $f(x) = 6.x^2$ que pasa por los puntos (1;9) y $(0;7)$ es $p(x) = 2.x^3 + 7$.