MATEMÁTICAS II. Grupos 13 y 14 L.A.D.E.

1ª Convocatoria. 14 de Junio de 2006

1^{er} *Apellido* . . . . 2^{o} *Apellido* . . . . *Nombre* . . . . *Grupo* . . .

* *Nota: Debe entregarse el enunciado del examen, indicando en él las soluciones razonadas a las preguntas.*

1. Enuncia el teorema de Weierstrass, explica su importancia en el estudio de la optimización matemática y aporta un ejemplo donde podría aplicarse dicho teorema. (1 punto)

   Teorema de Weierstrass

   Sea $f : A \subset I\!R^n \to I\!R$ una función continua en A, siendo A un conjunto cerrado y acotado. Entonces, existen $a, b \in A$ tales que, $\forall x \in A$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$; es decir, existen $a, b \in A$ tales que $a \in A$ es un mínimo absoluto y $b \in A$ es un máximo absoluto de la función f en A.

   Su importancia ...

   A la hora de resolver un programa de optimización el interés se centra, en muchos casos, en la localización de extremos globales. Las técnicas de localización de óptimos para funciones diferenciables proporcionan optimalidad local, siendo necesario acudir a otros resultados, como el teorema enunciado, para garantizar la optimalidad global.

   Ejemplo

   máx $\quad x + y$ sujeto a la condición $x^2 + y^2 = 1$

2. Considerar el programa lineal definido por máx $(x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4)$ con $x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, 6$ y la siguiente tabla inicial del símplex.

x_b	c_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		5	1	5	0	0	5	1
x_3		1	0	2	1	0	2	-2
x_4		1	0	-1	0	1	4	0

   a) Responder las siguientes cuestiones (1 punto)

   1) Escribir las restricciones del problema lineal.

$$x_1 + 5x_2 + 5x_5 + x_6 = 5$$

$$2x_2 + x_3 + 2x_5 - 2x_6 = 1$$

$$-x_2 + x_4 + 4x_5 = 1$$

   2) Indicar la solución factible asociada a la tabla y el valor de la función objetivo.

   La solución es $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (5, 0, 1, 1, 0, 0)$ y $f(5, 0, 1, 1, 0, 0) = 3$

   3) $(\dfrac{10}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, 0, 0)$ ¿Es solución factible ?. Calcular $f(\dfrac{10}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, 0, 0)$

   Es solución factible porque sustituyendo dichos valores en las ecuaciones descritas anteriormente se verifican, es decir, $x_1 \ldots x_6 \geq 0$; $\frac{10}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 0 + 0 = 5$; $2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 1$; $\quad -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 4 \cdot 0 = 1$

   $f(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0) = 3$

b) Resolver por el algoritmo del símplex. (1 punto)

Completando la tabla inical para los datos del problema se tiene:

x_b	c_b	b	1	-2	-3	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	5	1	5	0	0	5	1
x_3	-3	1	0	2	1	0	2	-2
x_4	1	1	0	-1	0	1	4	0
		3	1	-2	-3	1	3	7
			0	0	0	0	3	7

La variable x_2 no básica tiene asociado el valor de $z_2 - c_2 = 0$ en la tabla anterior, lo que indica solución múltiple. Si entra x_2 en la base, para determinar la variable que sale: $\text{mín}\{\frac{5}{5}, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$ que corresponde a la variable x_3. La tabla actualizada queda:

x_b	c_b	b	1	-2	-3	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	6
x_2	-2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	-1
x_4	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	5	-1
		3	1	-2	-3	1	3	7
			0	0	0	0	3	7

Las soluciones son $\lambda(5, 0, 1, 1, 0, 0) + (1 - \lambda)(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0)\ \forall \lambda \in [0, 1]$
y el valor de la función objetivo en todas ellas es de 3 unidades. Notar que la solución de la cuestión 3 se obtiene de la anterior para el caso de $\lambda = \frac{1}{3}$